马来西亚华文独中教科书

数学

初二上册



董教总华文独中工委会统一课程委员会编纂

马来西亚华文独中教科书

数学

初二上册



董教总华文独中工委会统一课程委员会编纂

《数学》初二上册

行政编辑：黄宝玉
设计与排版：蔡思盛

© 郑重声明，此书版权归出版单位所有，未经允许，书上所有内容不得通过任何形式进行复制、转发、储存于检索系统，或翻译成其它语言的活动。

© Dong Zong
Hak cipta terpelihara. Mana-mana bahan atau bahagian dalam buku ini tidak dibenarkan diterbitkan semula, disimpan dalam cara yang boleh dipergunakan lagi, atau ditukar kepada apa-apa bentuk atau apa-apa cara, baik dengan elektronik, mekanikal, fotokopi, rakaman, pengalihan bahasa dan sebagainya tanpa mendapat kebenaran secara menulis daripada pihak penerbit terlebih dahulu.

© Dong Zong
All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, translated in any other languages, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior written permission of the publisher.

编辑单位：
董教总华文独中工委会统一课程委员会
Unified Curriculum Committee of
Malaysian Independent Chinese Secondary School Working Committee（MICSS）

出版发行：
马来西亚华校董事联合会总会（董总）
United Chinese School Committees' Association of Malaysia（Dong Zong）
Blok A, Lot 5, Seksyen 10, Jalan Bukit, 43000 Kajang,
Selangor Darul Ehsan, Malaysia.
Tel: 603-87362337
Fax: 603-87362779
Website: www.dongzong.my
Email: support@dongzong.my

印刷：
Percetakan Advanco Sdn Bhd.

版次：
2017年8月第1版

印次：
2020年10月第4次印刷

编审团队

编 写 者： 刘建华　张丽萍　林汶良　林美湘

学科顾问： 刘建华　陈庆地　张丽萍

编审委员： 陈玉丽　李鸿聪　张锦发　林汶良

姚和兴　萧子良　黎启春

责任编辑： 张锦发

（按姓氏笔画顺序排列）

鸣 谢

本书承蒙编审小组、林美湘、洪燕芬、林艾嘉等提供建设性意见，并协助编写及审稿，谨此统致谢忱。

董教总华文独中工委会统一课程委员会　启

2017年8月

编辑说明

一、这套《初中数学》是根据董教总华文独中工委会统一课程委员会所拟定的数学课程标准编写而成。在拟订课程标准的过程中，也参考了我国教育部所颁布的中学新课程纲要及各国的课程标准和教材，并采用了旧版统一课本《初中数学》的课程内容。

二、这套《初中数学》沿用旧版《初中数学》的综合方式编写，全套教材共分六册，分三年使用。每册的内容是依据各年级每学年上课三十二周，每周上课六节，每节四十分钟的时间分配而编写，惟各校可按个别情况斟酌处理。

三、这套教材共有38章，内容包括算术、代数、几何、集合论及统计学。其内容除了衔接小学的课程之外，也作为日后跨上高中的基础教材。

四、本书是初二上册，供初中二年级上半年使用，内容包括：
代数——多项式、因式分解、平方根与立方根
几何——三角形、四边形与多边形、周长与面积

五、本书设有“学习目标”，“注意”，“补充资料”，“思考题”及“随堂练习”栏目，目的在于使学生掌握学习的重点，厘清注意项目，启发思考能力，更增进学习的效果。

六、本书每节都设有习题，每一章后都设有总复习题，以巩固学生对于所学知识的理解。习题的答案都附于书末。此外，本书附有中英名词对照，供学习参考。

七、本书若有错误、疏漏或欠妥之处，祈望各校教师及读者予以指正，以供再版时修订参考。

董教总华文独中工委会统一课程委员会
《初中数学》编审小组

2017年8月

目录

1 多项式

1.1 多项式 2
1.2 多项式的四则运算 6
1.3 乘法公式 27

2 因式分解

2.1 因式分解 36
2.2 最高公因式与最低公倍式 54

3 平方根与立方根

3.1 平方根与算术平方根及其性质 62
3.2 数的立方根 70
3.3 有理数与无理数 73
3.4 二次根式的化简 75
3.5 二次根式的四则运算 79

4 三角形

4.1 三角形 98
4.2 三角形的内角与外角 105
4.3 全等三角形 113
4.4 等腰三角形及等边三角形 140
4.5 直角三角形 148

目录

5 四边形及多边形

5.1 四边形 162
5.2 平行四边形 164
5.3 长方形 175
5.4 菱形 179
5.5 正方形 184
5.6 风筝形 187
5.7 梯形 190
5.8 四边形之间的关系 193
5.9 多边形 195

6 周长与面积

6.1 周长 214
6.2 面积 219
6.3 面积单位的换算 238

名词对照 245
答案 248

1 多项式

学习目标

- 了解多项式的项、系数、常数项及次数
- 能进行多项式的四则运算
- 掌握乘法公式



1.1 多项式

我们在初一上册学过，将一个数连乘几次，可用指数式来表达。例如，5×5可写成5^2，读作5的平方或5的二次方。相同的，$a\times a\times a$也可写成a^3，读成a的立方或a的三次方。5^2，a^3就叫做幂。

单项式与多项式

在一个代数式中，若其分母不含变数，则此代数式就叫做整式。例如，$2x+3y$，$-3a(c-2d)$，$\dfrac{3m-4n}{7}$都是整式。

看看下列的代数式：

$$2x,\ -3a^2,\ \frac{5}{7}mn,\ -6pqr$$

这些式子都是数字与变数的乘积，像这样的代数式叫做单项式。单项式的数字与变数相乘时，通常把数字写在前面。单项式中的数字就是这个单项式的系数。例如，单项式$5x$中，5就是$5x$的系数，也简称为x的系数。

在一个单项式中，所有变数的指数的和叫做这个单项式的次数。例如：单项式$25x^2$的变数x的指数是2，所以其次数为2；又如单项式$3a^3b$中，变数a与b的指数分别为3及1，所以其次数是$3+1=4$。若单项式中不含变数，则其次数为0。



注意

单独一个数或是一个变数也是单项式。例如，x与-5都是单项式。

例题 1

下列的代数式中，哪些是单项式？

$-2x^2$， a^2b+c， $4x+5$， $\frac{4xy}{5}$， $3x^2-x+7$

解： $-2x^2$ 及 $\frac{4xy}{5}$ 是单项式。

例题 2

写出下列各单项式的系数与次数：

(a) $9x$　(b) $-2ab^2c$　(c) xy

(d) $\frac{3x^2y}{10}$　(e) -7　(f) $-\frac{2}{5}pqr^3$

解：

	单项式	系数	次数
(a)	$9x$	9	1
(b)	$-2ab^2c$	-2	4
(c)	xy	1	2
(d)	$\frac{3x^2y}{10}$	$\frac{3}{10}$	3
(e)	-7	-7	0
(f)	$-\frac{2}{5}pqr^3$	$-\frac{2}{5}$	5

一个单项式或几个单项式的和叫做多项式。例如，$\frac{1}{5}$，$-3x$，$2x+5y$，$4x^2-5x+6$，$-3p^2-2pq+q^2$都是多项式。多项式中的每个单项式都叫做多项式的项。不含变数的项叫做常数项。例如，在$z+0.5$中，0.5就是常数项。

两个单项式的和，叫做二项式；三个单项式的和，叫做三项式；依此类推，可得四项式，五项式，…。

在写只含一个变数的多项式时，我们可以按该变数的指数从大到小的顺序来排列或从小到大的顺序来排列，分别称为降幂排列或升幂排列。例如，多项式$-2x^3-5+4x-3x^4$的降幂排列及升幂排列分别为$-3x^4-2x^3+4x-5$或$-5+4x-2x^3-3x^4$。

例题 3

按x的降幂排列多项式$4x^3-\frac{1}{3}-5x^4+2x$。

解： $-5x^4+4x^3+2x-\frac{1}{3}$。

例题 4

按y的升幂排列多项式$-5y^2+3y+2+7y^3$。

解： $2+3y-5y^2+7y^3$。

同类项

两个或以上的单项式中，若所含的变数相同，且相同变数的指数也分别相同，则这些单项式就叫做同类项。例如 $2ab^2$ 与 $3ab^2$ 是同类项，$-\frac{2}{5}m^2n^3$ 与 $-5n^3m^2$ 也是同类项，而 $5x^2y$ 与 $4xy^2$ 就不是同类项。

例题 5

下列各题的单项式中，哪些是同类项？

(a) $-2a^2$ 与 $\frac{2}{3}a^2$

(b) $\frac{1}{3}ab^3$ 与 $-\frac{4}{3}ab^3c$

(c) -25 与 36

(d) $9x^2y$ 与 $\frac{1}{2}yx^2$

解： (a)，(c) 及 (d) 中的是同类项，而 (b) 中的不是同类项。

练习 1.1

1. 下列的代数式中，哪些是单项式？

   $-3x$， $4x^2-\frac{1}{2}$， x^2+8， $-x^2y^2$， $-x^2-6$， $ab+c$， $-\frac{5}{9}$， $-\frac{2}{3}ab^2c^3$

2. 写出下列各单项式的系数与次数：

单项式	$-3ab$	$\frac{1}{2}x^2y$	$0.1xyz$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}pqrs^2$	$\frac{-2ab^2c^3}{3}$
系　数						
次　数						

3. 按x的降幂排列下列各多项式：

(a) $8x^3-x^5+3x^4-12-x$

(b) $\frac{2}{3}x^4+\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}x^3+\frac{5}{12}$

4. 按x的升幂排列下列各多项式：

(a) $-10x^2+13x^3-2+3x^4-4x$

(b) $x-\frac{2}{3}x^2-5x^3+6$

1.2 多项式的四则运算

多项式的加法与减法

多项式的相加与相减，就是将各式中的同类项的系数相加减。

例题 1

化简下列各式：

(a) $3a+5a$

(b) $6ab-10ab$

(c) $3ab^2-2b^3+a^3-2a^3+ab^2$

(d) $-5+a+6a^2+7-5a-4a^2$

解： (a) $3a+5a=(3+5)a$

$=8a$

(b) $6ab-10ab=(6-10)ab$
$=-4ab$

(c) $3ab^2-2b^3+a^3-2a^3+ab^2=3ab^2+ab^2-2b^3+a^3-2a^3$
$=4ab^2-2b^3-a^3$

(d) $-5+a+6a^2+7-5a-4a^2=-5+7+a-5a+6a^2-4a^2$
$=2-4a+2a^2$

例题 2

化简下列各式：

(a) $(4xy+3by)+(6xy-by)$

(b) $f^2-1-(4-f^2)$

(c) $5x^2+3xy+y^2-(2x^2-xy+8y^2)$

解： (a) $(4xy+3by)+(6xy-by)=4xy+3by+6xy-by$
$=10xy+2by$

(b) $f^2-1-(4-f^2)=f^2-1-4+f^2$
$=2f^2-5$

(c) $5x^2+3xy+y^2-(2x^2-xy+8y^2)=5x^2+3xy+y^2-2x^2+xy-8y^2$
$=3x^2+4xy-7y^2$

例题 3

求 $3p^2-pq+q^2$， $-p^2+pq-2q^2$ 与 $2p^2-3pq+q^2$ 的和。

解： $(3p^2-pq+q^2)+(-p^2+pq-2q^2)+(2p^2-3pq+q^2)$

$=3p^2-pq+q^2-p^2+pq-2q^2+2p^2-3pq+q^2$

$=4p^2-3pq$

随堂练习 1

化简下列各式：

1. $4x^2-x^2-5x^2$
2. $ab-4ab+12ab$
3. $x^2+7x-(2x^2-x)$
4. $-x^2y+5yx-2x^2y+7xy$
5. $3(x^2+1)-2(x^2-1)$
6. $4\left(\frac{1}{2}y+1\right)-2\left(4y-\frac{1}{2}\right)$

练习 1.2a

化简下列各式：(1 至 14)

1. $3x^2+5x^2-8x^2$
2. $7ab-ab+17ab$
3. $x^2+5x+6-3x^2+x$
4. $10-3x^2+4x-x^3+2x^2-1$
5. $8x^2+yx-2x^2+xy$
6. $2x^2-y-(y+3x^2)$
7. $2x^2y-3xy^2+(-3x^2y+xy^2)$
8. $5(x^2+y)-3(x^2-y)$
9. $2x^2-3x-1+(-5+3x-x^2)$
10. $6c^3+8+(-3c^2+11)-(-4c^3-2c^2)$
11. $6x^2+2y^2-10xy-(4xy-3y^2+17x^2)$
12. $5x^2y-3y^2-(x+4)-(x^2y-2x+9)$

13. $4\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\right)+2\left(y-\frac{1}{2}\right)$

14. $-\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}y-1\right)+5\left(x-\frac{1}{10}y-1\right)$

15. 求 $5x^2+3x+6$，$7x^2+5+x$ 及 $7+2x+x^2$ 的和。

16. 求 $\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b$，$-a+\frac{2}{3}b$ 及 $\frac{3}{4}a-b$ 的和。

多项式的乘法

同底数幂的乘法

例题 4

计算下列各式：

(a) $3^2\times3^4$ (b) $a^3\times a^5$

解： (a) $3^2\times3^4=(3\times3)\times(3\times3\times3\times3)$

$=3^6$

(b) $a^3\times a^5=(a\times a\times a)\times(a\times a\times a\times a\times a)$

$=a^8$

从例题 4 可以看出，$3^2\times3^4=3^{2+4}=3^6$

$a^3\times a^5=a^{3+5}=a^8$

一般上，

$$a^m\times a^n=(\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{m\text{个}})\times(\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{个}})$$

$$=\underbrace{a\times a\times\cdots\times a\times a\times a\times\cdots\times a}_{(m+n)\text{个}}$$

$$=a^{m+n}$$

因此，同底数的两个幂相乘时，其底数不变，指数相加。即

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad (m，n\text{是正整数})$$

例题 5

化简下列各式：

(a) $y^4 \times y^2$　　(b) $5^9 \times 5^3 \times 5^5$　　(c) $-x^2 \times x^6$

解：(a) $y^4 \times y^2 = y^{4+2}$

$= y^6$

(b) $5^9 \times 5^3 \times 5^5 = 5^{9+3+5}$

$= 5^{17}$

(c) $-x^2 \times x^6 = -x^{2+6}$

$= -x^8$

随堂练习 2

化简下列各式：

1. $x^8 \times x \times x^6$
2. $-y^4 \times y \times y^3$

幂的乘方

例题 6

化简下列各式：

(a) $\left(2^3\right)^2$　　　　(b) $\left(b^3\right)^4$

解：(a) $\left(2^3\right)^2 = 2^3 \times 2^3$

$= 2^{3+3}$

$= 2^6$

(b) $\left(b^3\right)^4 = b^3 \times b^3 \times b^3 \times b^3$

$= b^{3+3+3+3}$

$= b^{12}$

从例题 6 可以看出，$\left(2^3\right)^2 = 2^{3\times 2} = 2^6$

$\left(b^3\right)^4 = b^{3\times 4} = b^{12}$

一般上，$\left(a^m\right)^n = \underbrace{a^m \times a^m \times \cdots \times a^m}_{n\text{个}}$

$= a^{\overbrace{m+m+\cdots m}^{n\text{个}}}$

$= a^{mn}$

因此，幂的乘方，其底数不变，指数相乘。即

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

例题 7

计算 $-\left(z^4\right)^5$。

解： $-\left(z^4\right)^5 = -z^{4\times5}$

$= -z^{20}$

单项式的乘方

例题 8

化简下列各式：

(a) $(ab)^3$　　　(b) $\left(pq^2\right)^4$

解： (a) $(ab)^3 = (ab)(ab)(ab)$

$= (aaa)(bbb)$

$= a^3b^3$

(b) $\left(pq^2\right)^4 = \left(pq^2\right)\left(pq^2\right)\left(pq^2\right)\left(pq^2\right)$

$= (pppp)\left(q^2q^2q^2q^2\right)$

$= p^4q^8$

从例题8可以看出，
$$\begin{aligned}(ab)^n &= (ab)(ab)\cdots(ab)\\ &= \underbrace{(aa\cdots a)}_{n\text{个}a}\underbrace{(bb\cdots b)}_{n\text{个}b}\\ &= a^n b^n\end{aligned}$$

因此，单项式的乘方，就是把单项式的每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘。即

$$(ab)^n = a^n b^n$$

例题 9

计算下列各式：

(a) $(xy)^5$　　(b) $(2x)^4$

(c) $(-4a)^3$　　(d) $(-3ab)^2$

解： (a) $(xy)^5 = x^5y^5$

(b) $$\begin{aligned}(2x)^4 &= 2^4x^4\\ &= 16x^4\end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned}(-4a)^3 &= (-4)^3a^3\\ &= -64a^3\end{aligned}$$

(d) $$\begin{aligned}(-3ab)^2 &= (-3)^2a^2b^2\\ &= 9a^2b^2\end{aligned}$$

例题 10

计算下列各式:

(a) $\left(xy^2\right)^2$　　(b) $\left(-a^2b^2\right)^3$

(c) $\left(-2x^2y^3\right)^4$

解: (a) $\left(xy^2\right)^2 = x^2\left(y^2\right)^2$
$= x^2y^4$

(b) $\left(-a^2b^2\right)^3 = -\left(a^2\right)^3\left(b^2\right)^3$
$= -a^6b^6$

(c) $\left(-2x^2y^3\right)^4 = 2^4\left(x^2\right)^4\left(y^3\right)^4$
$= 16x^8y^{12}$

注意

在计算单项式的乘方时,可以先决定所得结果的符号。

随堂练习 3

计算下列各式:

1. $\left(3^5\right)^5$
2. $-\left(a^2\right)^5$
3. $\left(-ab^3\right)^2$
4. $\left(3a^3b\right)^3$
5. $\left(x^4\cdot x^5\right)^3$

练习 1.2b

计算下列各式：

1. $x^4 \times x^8 \times x$
2. $-b^2 \times b^3 \times b^5$
3. $\left(y^4\right)^6$
4. $-\left(a^5\right)^2$
5. $\left(-b^2\right)^6$
6. $(2m)^3$
7. $\left(5x^2\right)^2$
8. $\left(-x^2y^3\right)^2$
9. $\left(-2a^2b\right)^4$
10. $\left(\frac{1}{4}ab^3\right)^2$
11. $(-z)^3 \times (-z)^2$
12. $(-a)^2 \times (-a)^{10} \times (-a)^3$

单项式乘单项式

例题 11

计算下列各式：

(a) $4a \times \left(-5a^2\right)$

(b) $2xy \times 3xy^2$

(c) $3ax^2 \times \left(-5axy^2\right)$

(d) $xy \times \left(-xy^2\right) \times \left(-x^2y\right)$

解： (a) $4a \times \left(-5a^2\right) = -(4\times5)\left(a\times a^2\right)$

$= -20a^3$

(b) $2xy \times 3xy^2 = (2\times3)(x\times x)\left(y\times y^2\right)$

$= 6x^2y^3$

(c) $3ax^2 \times (-5axy^2) = -15a^2x^3y^2$

(d) $xy \times (-xy^2) \times (-x^2y) = x^4y^4$

随堂练习 4

计算下列各式：

1. $3x \times 2y$
2. $-4ab \times 3b$
3. $-2st \times 5s^2t \times 8st^2$

练习 1.2c

计算下列各式：

1. $5a \times 12b$
2. $-2xy \times (-6xy)$
3. $-3p \times (-7q) \times 4r$
4. $2ab^2 \times 3a^2b \times 4ab$
5. $(-3a^5)^3(-b^2)^2$
6. $pq \times 2pq \times 4pq \times \left(\frac{1}{2}pq\right)^2$

单项式乘多项式

例题 12

计算 $a(2b+3c-4d)$。

解： $a(2b+3c-4d) = 2ab+3ac-4ad$

例题 13

计算 $-\frac{2}{5}x^2\left(10xy+\frac{5}{6}y-x^2\right)$。

解： $-\frac{2}{5}x^2\left(10xy+\frac{5}{6}y-x^2\right)=-\frac{2}{5}x^2(10xy)+\left(-\frac{2}{5}x^2\right)\left(\frac{5}{6}y\right)+\left(-\frac{2}{5}x^2\right)(-x^2)$

$$=-4x^3y-\frac{1}{3}x^2y+\frac{2}{5}x^4$$

例题 14

计算 $y(x+y)-2x(x-y)+4xy$。

解： $y(x+y)-2x(x-y)+4xy=xy+y^2-2x^2+2xy+4xy$

$$=y^2-2x^2+xy+2xy+4xy$$

$$=y^2-2x^2+7xy$$

随堂练习 5

计算下列各式：

1. $3x(5x-4)$
2. $(5-b)(-2b)$
3. $2x^2(2x^2-3x+1)$
4. $-2pq\left(\frac{1}{2}p^2-\frac{1}{4}pq+q^2\right)$

练习 1.2d

计算下列各式：

1. $9x(3x+4)$
2. $-6x(3-x)$
3. $xy(xy-yz+zx)$
4. $-3y(3y^2-5y-3)$
5. $2x^2\left(xy^2-\frac{1}{2}y^3\right)$
6. $-4ab^2\left(\frac{1}{4}b^2-\frac{1}{2}ab+4a^2b^2\right)$
7. $4a(3a-b)-5b(4b-a)$

多项式乘多项式

例题 15

计算下列各式：

(a) $(x+5)(x+2)$

(b) $(3-x)(5-x)$

(c) $(3x+2)(2x-3)$

解： (a)
$$\begin{aligned}(x+5)(x+2)&=x(x+2)+5(x+2)\\&=x^2+2x+5x+10\\&=x^2+7x+10\end{aligned}$$

即
$$\begin{aligned}(x+5)(x+2)&=x^2+2x+5x+10\\&=x^2+7x+10\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}(3-x)(5-x)&=15-3x-5x+x^2\\&=15-8x+x^2\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}(3x+2)(2x-3)&=6x^2-9x+4x-6\\&=6x^2-5x-6\end{aligned}$$

例题 16

计算 $(x-y)(x^2+xy+y^2)$。

解： $(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3+x^2y+xy^2-x^2y-xy^2-y^3$

$=x^3-y^3$

随堂练习 6

计算下列各式：

1. $(x-3)(x-2)$
2. $(2x-3)(x+1)$
3. $(x^2-5)(x^2-1)$
4. $(x+1)(x^2-x+1)$
5. $3x(x-6)+2(x-3)(x+5)$

练习 1.2e

计算下列各式：

1. $(x+2)(x+8)$
2. $(n-4)(n-7)$
3. $(3y-1)(y+5)$
4. $(4a+5)(3-a)$
5. $(n^2+7)(3-n^2)$
6. $(1-x)(4x^2-7x+9)$
7. $(3n^2-8n-3)(n+2)$
8. $(x+2)(x-3)(2x^2-5)$
9. $(x+1)(2x-1)+3(x+4)(x-1)$

多项式的除法

同底数幂的除法

例题 17

计算下列各式：

(a) $3^9 \div 3^5$ (b) $a^6 \div a^4$

解： (a) $3^9 \div 3^5 = \dfrac{3^9}{3^5}$

$$= \frac{3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3\times3}$$

$$= 3^4$$

(b) $a^6 \div a^4 = \dfrac{a\times a\times a\times a\times a\times a}{a\times a\times a\times a}$

$$= a^2$$

从例题 17 可以看出， $a^m \div a^n = \dfrac{\overbrace{a\times a\times\cdots\times a}^{m\text{个}}}{\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{个}}}$

$$= a^{m-n}$$

即

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (m,\ n\text{是正整数，且 } m > n)$$

例题 18

计算下列各式：

(a) $a^8 \div a^2$

(b) $(-a)^5 \div (-a)$

(c) $(ab)^6 \div (ab)^2$

解： (a) $a^8 \div a^2 = a^{8-2}$

$= a^6$

(b) $(-a)^5 \div (-a) = (-a)^{5-1}$

$= (-a)^4$

$= a^4$

(c) $(ab)^6 \div (ab)^2 = (ab)^{6-2}$

$= (ab)^4$

$= a^4 b^4$

随堂练习 7

计算下列各式：

1. $y^7 \div y^3$

2. $(-b)^7 \div (-b)^4$

3. $(ay)^8 \div (ay)^3$

4. $\dfrac{a^7}{a^7}$

练习 1.2f

计算下列各式：

1. $y^{10} \div y^{6}$
2. $(-a)^{9} \div (-a)^{2}$
3. $(ax)^{16} \div (ax)^{9}$
4. $\dfrac{x^{16}}{x^{15}}$

单项式除以单项式

例题 19

计算下列各式：

(a) $33a^4 \div 11a^2$

(b) $-5a^2b^2 \div 15ab$

(c) $-3ab^2 \div ab^2$

解： (a) $33a^4 \div 11a^2 = \dfrac{33a^4}{11a^2}$

$= 3a^2$

(b) $-5a^2b^2 \div 15ab = \dfrac{-5a^2b^2}{15ab}$

$= -\dfrac{ab}{3}$

(c) $-3ab^2 \div ab^2 = \dfrac{-3ab^2}{ab^2}$

$= -3$

随堂练习 8

计算下列各式：

1. $18ab^2 \div 6b$
2. $12a^3b^2 \div (-12a^3b^2)$

多项式除以单项式

例题 20

计算 $(am+bm+cm)\div m$。

解： $$(am+bm+cm)\div m = \frac{am+bm+cm}{m} = \frac{am}{m}+\frac{bm}{m}+\frac{cm}{m} = a+b+c$$

例题 21

计算 $(12a^6-34a^4)\div 2a^2$。

解： $$(12a^6-34a^4)\div 2a^2 = \frac{12a^6}{2a^2}-\frac{34a^4}{2a^2} = 6a^4-17a^2$$

例题 22

计算 $(36x^4y^3-24x^3y^2)\div(-6x^2y)$。

解： $(36x^4y^3-24x^3y^2)\div(-6x^2y)=-\dfrac{36x^4y^3}{6x^2y}+\dfrac{24x^3y^2}{6x^2y}$

$=-6x^2y^2+4xy$

随堂练习 9

计算下列各式：

1. $(6x^2-9x)\div3x$
2. $\left(30a^5b^2-\dfrac{2}{5}a\right)\div5a$
3. $(2a^2+ab+3ac)\div(-a)$
4. $(4c^2d-8c^3d^2)\div(-2cd)$

练习 1.2g

计算下列各式：

1. $35a^2b^3\div5ab$
2. $-16a^3b^2\div6ab$
3. $78r^4s^3\div(-13rs^2)$
4. $(ab-ac)\div a$
5. $(6x^2+3x)\div3x$
6. $(32x^3y-8x^2y^3)\div(-4xy)$
7. $(36x^5y^2+12x^3y^2-48x^2y)\div6x^2y$
8. $(63a^2b^3+7ab^2-56a^3b^5)\div(-7ab^2)$

多项式除以多项式

例题 23

计算 $\left(2x^3+5x^2-2x-8\right)\div\left(x+2\right)$。

解：

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 2x^2 & +x & -4 & \\
\hline
x+2 & 2x^3 & +5x^2 & -2x & -8 \\
 & 2x^3 & +4x^2 & & \\
\hline
 & & x^2 & -2x & -8 \\
 & & x^2 & +2x & \\
\hline
 & & & -4x & -8 \\
 & & & -4x & -8 \\
\hline
 & & & & 0
\end{array}
$$

$\therefore \left(2x^3+5x^2-2x-8\right)\div\left(x+2\right)$
$=2x^2+x-4$

例题 24

计算 $\left(2x^3-x^2+3x+9\right)\div\left(2x-3\right)$。

解：

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & +x & +3 & \\
\hline
2x-3 & 2x^3 & -x^2 & +3x & +9 \\
 & 2x^3 & -3x^2 & & \\
\hline
 & & 2x^2 & +3x & +9 \\
 & & 2x^2 & -3x & \\
\hline
 & & & 6x & +9 \\
 & & & 6x & -9 \\
\hline
 & & & & 18
\end{array}
$$

商式 $=x^2+x+3$，余式 $=18$

补充资料

例题 23 中的演算过程称为长除法，其具体步骤如下：

1. 先将被除式及除式按变数降幂排列，如有缺项需补零。
2. 用除式的第一项 x 去除被除式的第一项 $2x^3$，所得的商 $2x^2$ 即是商式的第一项。
3. 用商式的第一项 $2x^2$ 乘以除式，将积写在被除式下面，并将同类项对齐，然后从被除式中减去这个积，得到 x^2-2x-8。
4. 将 x^2-2x-8 当作新的被除式，再按相同的方法继续演算至余式的次数低于除式的次数或余式是 0 为止。

例题 25

求 $(5x^2+2x^3-2)\div(1+2x)$ 的商式及余式。

解： $(5x^2+2x^3-2)\div(1+2x)=(2x^3+5x^2-2)\div(2x+1)$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & +2x & -1 & \\ \cline{2-5}
2x+1 & 2x^3 & +5x^2 & +0 & -2 \\
 & 2x^3 & +x^2 & & \\ \cline{2-5}
 & & +4x^2 & +0 & -2 \\
 & & +4x^2 & +2x & \\ \cline{2-5}
 & & & -2x & -2 \\
 & & & -2x & -1 \\ \cline{2-5}
 & & & & -1
\end{array}
$$

商式 $=x^2+2x-1$，余式 $=-1$

随堂练习 10

计算下列各式：

1. $(4+14x+6x^2)\div(3x+1)$
2. $(2y^5-y^4+2y-1)\div(2y-1)$
3. $(6a^3-5a^2+a)\div(2a-5)$

练习 1.2h

计算下列各式：

1. $(3x^2+26x+35)\div(x+7)$
2. $(9y^2-80)\div(y+3)$
3. $(y^3-2y^2-y-2)\div(y-4)$
4. $(z^4-16)\div(2+z)$
5. $(15+3a-7a^2-4a^3)\div(5-4a)$
6. $(-11x^2+4+6x^3)\div(2x-1)$

1.3 乘法公式

平方差公式

由多项式的乘法运算，可得

$$
\begin{aligned}
(a+b)(a-b) &= a^2-ab+ab-b^2 \\
&= a^2-b^2
\end{aligned}
$$

即

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

例题 1

用平方差公式展开下列各式：

(a) $(x+2)(x-2)$

(b) $(7+q)(7-q)$

(c) $(x+y)(y-x)$

解： (a)
$$
\begin{aligned}
(x+2)(x-2) &= x^2-2^2 \\
&= x^2-4
\end{aligned}
$$

(b)
$$
\begin{aligned}
(7+q)(7-q) &= 7^2-q^2 \\
&= 49-q^2
\end{aligned}
$$

(c)
$$
\begin{aligned}
(x+y)(y-x) &= (y+x)(y-x) \\
&= y^2-x^2
\end{aligned}
$$

例题 2

展开下列各式：

(a) $(2x+3)(2x-3)$

(b) $(4p-q)(4p+q)$

(c) $\left(\frac{1}{2}s+\frac{1}{3}t\right)\left(\frac{1}{2}s-\frac{1}{3}t\right)$

(d) $(-x-y)(x-y)$

(e) $(y+2)(y-2)(y^2+4)$

解： (a)
$$\begin{aligned}(2x+3)(2x-3)&=(2x)^2-3^2\\&=4x^2-9\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}(4p-q)(4p+q)&=(4p)^2-q^2\\&=16p^2-q^2\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}s+\frac{1}{3}t\right)\left(\frac{1}{2}s-\frac{1}{3}t\right)&=\left(\frac{1}{2}s\right)^2-\left(\frac{1}{3}t\right)^2\\&=\frac{1}{4}s^2-\frac{1}{9}t^2\end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned}(-x-y)(x-y)&=-(x+y)(x-y)\\&=-(x^2-y^2)\\&=-x^2+y^2\end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned}(y+2)(y-2)(y^2+4)&=(y^2-4)(y^2+4)\\&=y^4-16\end{aligned}$$

例题 3

用平方差公式计算下列各式：

(a) 103×97　　　　(b) 11.4×8.6

解： (a) $103\times 97=(100+3)(100-3)$

$=100^2-3^2$

$=10000-9$

$=9991$

(b) $11.4\times 8.6=(10+1.4)(10-1.4)$

$=10^2-1.4^2$

$=100-1.96$

$=98.04$

随堂练习 11

展开下列各式 (1 至 4)：

1. $(10+y)(10-y)$
2. $(x-2y)(x+2y)$
3. $(6x-5y)(-6x-5y)$
4. $(3x+4)(3x-4)(9x^2+16)$
5. 用平方差公式计算9.8×10.2。

练习 1.3a

用平方差公式展开下列各式 (1 至 8):

1. $(p-13)(p+13)$
2. $(8+y)(8-y)$
3. $(2+y)(y-2)$
4. $(4p-9q)(-4p-9q)$
5. $(x^2+y^2)(x^2-y^2)$
6. $\left(\frac{3}{4}-p\right)\left(\frac{3}{4}+p\right)$
7. $(5x+y)(5x-y)(25x^2+y^2)$
8. $(-2q-p)(p-2q)(4q^2+p^2)$
9. 用平方差公式计算下列各式:
   (a) 202×198
   (b) 9.5×10.5

完全平方公式

运用多项式的乘法计算，可得

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\
&= a^2+ab+ab+b^2 \\
&= a^2+2ab+b^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a-b)^2 &= (a-b)(a-b) \\
&= a^2-2ab+b^2
\end{aligned}
$$

即

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

例题 4

用完全平方公式展开下列各式：

(a) $(10-y)^2$　　(b) $(3p+4q)^2$

解： (a) $(10-y)^2 = 10^2 - 2(10)(y) + y^2$

$= 100 - 20y + y^2$

(b) $(3p+4q)^2 = (3p)^2 + 2(3p)(4q) + (4q)^2$

$= 9p^2 + 24pq + 16q^2$

例题 5

用完全平方公式展开下列各式：

(a) $(x^2-5)^2$　　(b) $(-a-2b)^2$

(c) $(a+b+c)^2$　　(d) $(x+y-z)^2$

解： (a) $(x^2-5)^2 = (x^2)^2 - 2(x^2)(5) + 5^2$

$= x^4 - 10x^2 + 25$

(b) $(-a-2b)^2 = [-(a+2b)]^2$

$= (a+2b)^2$

$= (a)^2 + 2(a)(2b) + (2b)^2$

$= a^2 + 4ab + 4b^2$

补充资料

$(-a-b)^2 = [-(a+b)]^2$

$= (a+b)^2$

(c) $(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2$

$= (a+b)^2 + 2(a+b)(c) + c^2$

$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

(d) $(x+y-z)^2 = [(x+y)-z]^2$
$= (x+y)^2 - 2(x+y)(z) + z^2$
$= x^2 + 2xy + y^2 - 2xz - 2yz + z^2$
$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz$

例题 6

用完全平方公式计算下列各式：

(a) 198^2 (b) 5.03^2

解： (a) $198^2 = (200-2)^2$
$= 200^2 - 2(200)(2) + 2^2$
$= 40000 - 800 + 4$
$= 39204$

(b) $5.03^2 = (5+0.03)^2$
$= 5^2 + 2(5)(0.03) + 0.03^2$
$= 25 + 0.3 + 0.0009$
$= 25.3009$

随堂练习 12

用完全平方公式展开下列各式 (1 至 4)：

1. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$
2. $(-2x-y)^2$
3. $(a^2-3y^2)^2$
4. $(2x+y-z)^2$
5. 用完全平方公式计算下列各式：

(a) 99^2 (b) 8.9^2

练习 1.3b

用完全平方公式展开下列各式 (1 至 10)：

1. $(x+6)^2$
2. $(1-3a)^2$
3. $(3x+7y)^2$
4. $\left(\frac{1}{2}x-y\right)^2$
5. $(-4x-5y)^2$
6. $(x^2-8)^2$
7. $\left(9x+\frac{1}{3}y\right)^2$
8. $(7a^2+3b^2)^2$
9. $(x+y+2z)^2$
10. $(2a-b-2c)^2$
11. 用完全平方公式计算996^2。

总复习题 1

化简下列各式 (1 至 13)：

1. $25x^2y-13x^2y+x^2y$
2. $(2a^2+ab-b^2)+(a^2-2ab+b^2)-(3a^2+ab-2b^2)$
3. $x(3x+y)-y(2x-3y)-(x^2-y^2)$
4. $5a^2-[a^2+(5a^2-2a)-2(a^2-3a)]$
5. $3ab^2\times(-4a^2b)$
6. $xy^2\times xy\times(-4x)$
7. $14s^3t^2\div(-7s^3t)$
8. $2a^2b\times3ab^2\div2a^3b$
9. $(2ab)^2\times(-a)^2\times(-b)^3$
10. $2ab(3ab-2b)$
11. $-\frac{2}{3}a\left(\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{6}a-\frac{1}{4}\right)$
12. $(15x^4y^2-5x^2y^2)\div5xy$
13. $(a^2b-ab^2-5ab)\div(-ab)$

展开下列各式 (14 至 25)：

14. $(x-7)(x+5)$

15. $(x-7y)(x+7y)$

16. $(5a-b)(-a-4b)$

17. $(4x+3)^2$

18. $(3x^2-y^2)(x^2+y^2)$

19. $(8+3r^2-2r)(5r-2)$

20. $(5+ab)(5-ab)$

21. $(2x+y-3z)^2$

22. $3(2x-1)(x+6)-5(x-3)(x+6)$

23. $(a+b)^2+(a-b)^2+(-2a-b)(a+2b)$

24. $(a+b)^3$

25. $(a-b)^3$

计算下列各式 (26 至 28)：

26. $(8t^3-10t^2+15t-9)\div(4t-3)$

27. $(a^3-1)\div(a-1)$

28. $(12+8x^2-10x-3x^3)\div(2-x)$

29. 用乘法公式计算下列各式：

(a) $(99.3)^2$ (b) $(208)^2$ (c) 11.5×8.5

2 因式分解

学习目标

- 能进行多项式的因式分解
- 能求多项式的最高公因式与最低公倍式



2.1 因式分解

我们在上一章学过多项式的乘法，利用乘法运算，我们可将几个多项式的乘积化为一个多项式，例如：$(x+y)(2x-y)=2x^2+xy-y^2$。反过来，有时我们也可以将一个多项式分解成几个多项式的乘积。

若一个多项式可写成两个多项式的乘积，则乘积中的每一个多项式都是原多项式的因式。

如上面的例子，1，$x+y$，$2x-y$ 及 $2x^2+xy-y^2$ 都是 $2x^2+xy-y^2$ 的因式。

在初中一我们学过，将一个数分解成几个因数的乘积，例如：$120=2^3\times3\times5$，$210=2\times3\times5\times7$。

类似地，

> 将一个多项式分解成几个因式的乘积的过程，就叫做因式分解。

例如：$a^2-4b^2=(a+2b)(a-2b)$，

$x^3y-xy^2=xy(x^2-y)$。

一般上，因式分解须进行到每一个多项式因式都不能再分解为止。常用的因式分解法有以下几种。

抽取公因式法

我们知道 $a(x+2y)=ax+2ay$。反过来 $ax+2ay=a(x+2y)$，即 $ax+2ay$ 可以分解成因式 a 与 $x+2y$ 的乘积。在式子 $ax+2ay$ 中，a 是 ax 的因式，同时也是 $2ay$ 的因式，所以 a 是 ax 与 $2ay$ 的相同因式。

如果一个式子中的每一项都含有相同的因式，我们就可以将它抽取出来，这种因式分解的方法叫做抽取公因式法。

例题 1

因式分解下列各式：

(a) $ab+bc$　　(b) $4a-12b$

(c) $-a-ab$

解： (a) $ab+bc=b(a+c)$

(b) $4a-12b=4(a-3b)$

(c) $-a-ab=-a(1+b)$

注意

若要检验所得的因式分解是否正确，我们可以将结果展开，看是否与原来的多项式相同。

例题 2

因式分解下列各式：

(a) ab^2+3bc　　(b) $7x^2y-7xy^2$

(c) $5x^3-x^2$　　(d) $2xy-xyz$

解： (a) $ab^2+3bc=b(ab+3c)$

(b) $7x^2y-7xy^2=7xy(x-y)$

(c) $5x^3-x^2=x^2(5x-1)$

(d) $2xy-xyz=xy(2-z)$

例题 3

因式分解下列各式：

(a) $(a-b)x+(a-b)y$

(b) $4(b-a)+y(a-b)$

(c) $(a-3b)^2-(a-3b)(2a+3b)$

解： (a) $(a-b)x+(a-b)y=(a-b)(x+y)$

(b) $4(b-a)+y(a-b)=4(b-a)-y(b-a)$

$=(b-a)(4-y)$

注意

$a-b=-(b-a)$

(c) $(a-3b)^2-(a-3b)(2a+3b)=(a-3b)[(a-3b)-(2a+3b)]$

$=(a-3b)(a-3b-2a-3b)$

$=(a-3b)(-a-6b)$

$=-(a-3b)(a+6b)$ 或 $(3b-a)(a+6b)$

随堂练习 1

因式分解下列各式：

1. $9a-36ab$
2. $20+5b-15a$
3. $7x^3y-28x^2y$
4. a^4-a^3
5. $4b(a-b)+6(a-b)$
6. $b(x-y)+2(y-x)$

练习 2.1a

因式分解下列各式：

1. $12x+48y$
2. $7a-28ab$
3. $-8x-56$
4. $6a+3ab-ac$
5. $4x^2+8$
6. $5xy^2+25x^2y$
7. x^4+x^2
8. $4x^2+8x-14$
9. $216x^3+36x^2+6x$
10. $x^2yz^2+xy^2z-xyz$
11. $x(2a-b)+2(2a-b)$
12. $4b(3a+2b)+2(3a+2b)$
13. $p(y-x)-q(x-y)$
14. $5a(x-3)-15b(3-x)$
15. $(2a-b)(2x+y)+(2a-b)(x-4y)$
16. $6p(3x+2y)-(3p+2q)(3x+2y)$

应用公式法

平方差公式

在上一章我们学过乘法公式，即 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$。反过来，我们就可得到以下的平方差公式。

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

应用这个公式，就可以将形式是平方差的多项式因式分解。

例题 4

因式分解下列各式：

(a) a^2-5^2　　(b) $9-x^2$

(c) $9x^2-25y^2$

解： (a) $a^2-5^2=(a+5)(a-5)$

(b) $9-x^2=(3+x)(3-x)$

(c) $9x^2-25y^2=(3x)^2-(5y)^2$
$=(3x+5y)(3x-5y)$

例题 5

因式分解下列各式：

(a) $2a^2-18b^2$　　(b) $4p^2q^2-1$

(c) $a^2-\frac{9}{16}$　　(d) $(a+b)^2-c^2$

(e) $(2a+3b)^2-(a-b)^2$

解： (a) $2a^2-18b^2=2(a^2-9b^2)$
$=2\left[(a)^2-(3b)^2\right]$
$=2(a+3b)(a-3b)$

(b) $4p^2q^2-1=(2pq)^2-1^2$
$=(2pq+1)(2pq-1)$

(c) $a^2-\frac{9}{16}=a^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2$

$=\left(a+\frac{3}{4}\right)\left(a-\frac{3}{4}\right)$

(d) $(a+b)^2-c^2=(a+b+c)(a+b-c)$

(e) $(2a+3b)^2-(a-b)^2=[(2a+3b)+(a-b)][(2a+3b)-(a-b)]$

$=(2a+3b+a-b)(2a+3b-a+b)$

$=(3a+2b)(a+4b)$

随堂练习 2

1. 因式分解下列各式:

(a) a^2-144

(b) $1-4k^2$

(c) $2a^2-50b^2$

(d) $25(x-2)^2-9(x+2)^2$

2. 用平方差公式计算 $13.5^2-6.5^2$。

练习 2.1b

因式分解下列各式 (1 至 14):

1. a^2-225
2. d^2-64
3. a^2-4b^2
4. $36a^2b^2-1$
5. $a^2d^2-4c^2$
6. $p^2-\frac{1}{4}$
7. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}$
8. $12x^2-27y^2$

9. ab^2-121a

10. $4(a+b)^2-100$

11. $16a^2-9(a-b)^2$

12. a^4-81

13. $(2c-d)^2-(c-2d)^2$

14. $(3x+2y)^2-(x-y)^2$

15. 用平方差公式计算下列各式：

(a) 999^2-1　(b) 135^2-65^2　(c) $10.2^2-9.8^2$

完全平方公式

我们学过完全平方的展开公式，即

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

及 $$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

反过来我们就可得到

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

应用这个公式，就可以将形式是完全平方式的多项式因式分解。

例题 6

因式分解下列各式：

(a) x^2+6x+9　(b) $4-4x+x^2$

解： (a) $x^2+6x+9=x^2+(2)(x)(3)+3^2$

$$=(x+3)^2$$

(b) $4-4x+x^2=(2)^2-2(2)(x)+(x)^2$
$=(2-x)^2$

思考题

可否将例题 6(b) 的答案写成 $(x-2)^2$？

例题 7

因式分解下列各式：

(a) $6a-9a^2-1$

(b) $2a^2+32a+128$

(c) $25a^2-30ab+9b^2$

解： (a) $6a-9a^2-1=-(9a^2-6a+1)$
$=-[(3a)^2-2(3a)(1)+1^2]$
$=-(3a-1)^2$

(b) $2a^2+32a+128=2(a^2+16a+64)$
$=2[a^2+2(a)(8)+8^2]$
$=2(a+8)^2$

(c) $25a^2-30ab+9b^2=(5a)^2-2(5a)(3b)+(3b)^2$
$=(5a-3b)^2$

随堂练习 3

因式分解下列各式:

1. $x^2+12x+36$
2. $49c^2-84cd+36d^2$
3. $x^4+18x^3+81x^2$

练习 2.1c

因式分解下列各式:

1. $a^2+8a+16$
2. $x^2-10x+25$
3. $n^2+14n+49$
4. $16x^2+8x+1$
5. $1-4b+4b^2$
6. $10x-5-5x^2$
7. $3x^2+48x+192$
8. $4t^2-40t+100$
9. $x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}$
10. $4x^2+12xy+9y^2$
11. $16x^2-8xy+y^2$
12. $m^2n^2+32mn+256$
13. a^4+4a^2+4
14. b^4-8b^2+16
15. $(x+1)^2-4x$
16. $-8y+(y+2)^2$

交叉相乘法

当我们展开$(x+a)(x+b)$时，可得

$$(x+a)(x+b)=x^2+ax+bx+ab$$
$$=x^2+(a+b)x+ab$$

反过来，就得到

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

也就是说，对于二次三项式 x^2+px+q，如果能够将常数 q 分解成两个因数 a 及 b 的乘积，使得 a 与 b 的和等于 p，即 $p=a+b$，$q=ab$，那么这个多项式就能因式分解。

$$\begin{aligned} \therefore\ x^2+px+q &= x^2+(a+b)x+ab \\ &= (x+a)(x+b) \end{aligned}$$

例如，因式分解 x^2+5x+6，二次项的系数是1，将常数项6分解成两个因数的积，有以下几种方法：

$$\begin{aligned} 6 &= 1\times 6 \\ &= (-1)\times(-6) \\ &= 2\times 3 \\ &= (-2)\times(-3) \end{aligned}$$

而一次项的系数 $5=2+3$。

因此，$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$。

因式分解 x^2+5x+6 的过程，可以用下图表示：

x	$+1$	-1	$+2$	-2
x	$+6$	-6	$+3$	-3
	$+x+6x$	$-x-6x$	$+2x+3x$	$-2x-3x$
	$=7x$	$=-7x$	$=+5x$	$=-5x$

$$\therefore\ x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

注意

当求出符合一次项的系数条件后，便可确定答案。

在图中，先分解二次项，将 $x^2=x\cdot x$ 写在左边上下两行，而常数项6的因数写在右边上下，然后按斜线交叉相乘，若所得的积之和恰是一次项的 $5x$，那么第一行的 $(x+2)$ 及第二行的 $(x+3)$ 就是 x^2+5x+6 的因式。

这种以交叉线来因式分解的方法，叫做交叉相乘法。

例题 8

因式分解 x^2+9x+8。

解：

x	$+2$	-2	-1	$+1$
x	$+4$	-4	-8	$+8$
	$+2x+4x$	$-2x-4x$	$-x-8x$	$+x+8x$
	$=+6x$	$=-6x$	$=-9x$	$=+9x$

$\therefore\ x^2+9x+8=(x+1)(x+8)$

例题 9

因式分解 $x^2-7x-18$。

解： $\therefore\ x^2-7x-18=(x+2)(x-9)$

x	$+2$	$+2x$
x	-9	$-9x$
x^2	-18	$-7x$

例题 10

因式分解 $15-2b-b^2$。

解： $\therefore\ 15-2b-b^2=-(b^2+2b-15)$

$=-(b-3)(b+5)$ 或 $(b+5)(3-b)$

b	-3	$-3b$
b	$+5$	$+5b$
b^2	-15	$+2b$

随堂练习 4

因式分解下列各式：

1. $x^2+13x+36$
2. $x^2-10x+21$
3. x^2+x-12
4. $y^2-12y-108$
5. $x^2+4x-21$
6. $m^2-9m-22$

练习 2.1d

因式分解下列各式：

1. x^2+3x+2
2. $y^2+7y+10$
3. x^2+8x-9
4. x^2+x-56
5. y^2-4y-5
6. x^2-x-6
7. $b^2-3b-10$
8. $n^2-5n-24$
9. $y^2+12y-28$
10. $a^2+18a+72$
11. $n^2-18n+32$
12. $d^2+18d+45$
13. $28+3y-y^2$
14. $24-14x+x^2$
15. $8+2b^2-b^4$
16. $12+x^2-x^4$
17. x^3-7x^2-78x
18. $12-7e^2+e^4$

例题 11

因式分解 $2x^2+7x+3$。

解：

$2x$	$+3$	-1	$+1$	-3
x	$+1$	-3	$+3$	-1
	$+3x+2x$	$-x-6x$	$+x+6x$	$-3x-2x$
	$=+5x$	$=-7x$	$=+7x$	$=-5x$

$$\therefore\ 2x^2+7x+3=(2x+1)(x+3)$$

例题 12

因式分解下列各式：

(a) $2x^2-3x+1$　　(b) $4+7a+3a^2$

(c) $2x^2+x-6$

解： (a) $2x^2-3x+1=(2x-1)(x-1)$

$2x$	-1	$-x$
x	-1	$-2x$
$2x^2$	1	$-3x$

(b) $4+7a+3a^2=3a^2+7a+4$

$=(3a+4)(a+1)$

$3a$	4	$4a$
a	1	$3a$
$3a^2$	4	$7a$

(c) $2x^2+x-6=(2x-3)(x+2)$

$2x$	-3	$-3x$
x	2	$4x$
$2x^2$	-6	x

例题 13

因式分解 $4x^2+x-3$。

解：

$2x$	$+1$	-1	$+3$	-3
$2x$	-3	$+3$	-1	$+1$
	$+2x-6x$	$-2x+6x$	$+6x-2x$	$-6x+2x$
	$=-4x$	$=+4x$	$=+4x$	$=-4x$

$4x$	-1	$+3$	-3	$+1$
x	$+3$	-1	$+1$	-3
	$-x+12x$	$+3x-4x$	$-3x+4x$	
	$=+11x$	$=-x$	$=+x$	

$$\therefore\ 4x^2+x-3=(4x-3)(x+1)$$

例题 14

因式分解下列各式：

(a) $8n^2+2n-15$ (b) $6x^2-11x-10$

(c) $4x^2-3xy-10y^2$

解： (a) $8n^2+2n-15=(2n+3)(4n-5)$

$2n$	$+3$	$+12n$
$4n$	-5	$-10n$
$8n^2$	-15	$+2n$

(b) $6x^2-11x-10=(2x-5)(3x+2)$

$2x$	-5	$-15x$
$3x$	$+2$	$+4x$
$6x^2$	-10	$-11x$

(c) $4x^2-3xy-10y^2=(4x+5y)(x-2y)$

$4x$	$+5y$	$+5xy$
x	$-2y$	$-8xy$
$4x^2$	$-10y^2$	$-3xy$

随堂练习 5

因式分解下列各式:

1. $2x^2+5x+3$
2. $3x^2+x-2$
3. $4x^2+16x+7$
4. $6x^2-11x+3$
5. $1+3y-18y^2$
6. $x^2+4xy-21y^2$

练习 2.1e

因式分解下列各式:

1. $3x^2+7x+2$
2. $15-7p-2p^2$
3. $3y^2-5y-2$
4. $5x^2-4x-1$
5. $2x^2+11x+5$
6. $3a^2-7a-6$
7. $3b^2-2b-8$
8. $3a^2+14a+15$
9. $5y^2+13y+6$
10. $4a^2-7a-2$
11. $7n^2+19n-6$
12. $3d^2-17d-28$
13. $9a^2+a-10$
14. $12a^2+25a+12$
15. $21+29d-10d^2$
16. $24m^2+2mn-n^2$
17. $a^2-10ab+24b^2$
18. $x^2+xy-6y^2$
19. $4s^2-17st+4t^2$
20. $8a^2+10ab-3b^2$

分组分解法

在展开$(x+a)(y+b)$时，我们得到

$$(x+a)(y+b)=xy+bx+ay+ab$$

但是反过来，我们如何能将多项式$xy+bx+ay+ab$因式分解呢?

这个多项式没有公因式，但前两项有公因式x，而后两项有公因式a。因此我们可以将它分成两组，先在两组中各别抽取公因式，接着再抽取两组中的公因式，就可将多项式因式分解，即

$$\begin{aligned}xy+bx+ay+ab&=x(y+b)+a(y+b)\\&=(y+b)(x+a)\end{aligned}$$

把一个多项式适当地分组，来进行因式分解的方法，叫做分组分解法。

例题 15

因式分解下列各式：

(a) $ax+ay+2x+2y$

(b) $b^2-bc-bd+cd$

(c) $2ax+6by-4bx-3ay$

(d) $2ac-a-2bc+b$

解： (a) $\begin{aligned}ax+ay+2x+2y&=a(x+y)+2(x+y)\\&=(x+y)(a+2)\end{aligned}$

(b) $\begin{aligned}b^2-bc-bd+cd&=b(b-c)-d(b-c)\\&=(b-c)(b-d)\end{aligned}$

(c) $2ax+6by-4bx-3ay=2ax-4bx-3ay+6by$
$$=2x(a-2b)-3y(a-2b)$$
$$=(a-2b)(2x-3y)$$

(d) $2ac-a-2bc+b=a(2c-1)-b(2c-1)$
$$=(2c-1)(a-b)$$

注意
$-2bc+b=-b(2c-1)$

例题 16

因式分解下列各式：

(a) $x^2-y^2+5x-5y$

(b) $a^2-4b^2-3a-6b$

(c) $xy+x+y+1$

(d) $x^2-2xy+y^2-z^2$

(e) $a^2-b^2+6bc-9c^2$

解： (a) $x^2-y^2+5x-5y=(x+y)(x-y)+5(x-y)$
$$=(x-y)(x+y+5)$$

(b) $a^2-4b^2-3a-6b=(a+2b)(a-2b)-3(a+2b)$
$$=(a+2b)(a-2b-3)$$

(c) $xy+x+y+1=x(y+1)+(y+1)$
$$=(x+1)(y+1)$$

(d) $x^2-2xy+y^2-z^2=(x-y)^2-z^2$
$$=(x-y+z)(x-y-z)$$

(e) $a^2-b^2+6bc-9c^2=a^2-(b^2-6bc+9c^2)$

$$=a^2-(b-3c)^2$$
$$=[a+(b-3c)][a-(b-3c)]$$
$$=(a+b-3c)(a-b+3c)$$

随堂练习 6

因式分解下列各式：

1. $ac-c-a+1$
2. $3-3x+cx-c$
3. $x^2-6xy+9y^2-16$
4. $9m^2-4n^2+6m-4n$

练习 2.1f

因式分解下列各式：

1. $xm-xn+ym-yn$
2. $2x+xy+2y+y^2$
3. $pr-rs+qs-pq$
4. $ax+bx-ay-by$
5. $4ax-2ay-6bx+3by$
6. $k^2-km-10k+10m$
7. $xy-3yz-21z+7x$
8. $xy-2x-6+3y$
9. $3x+xy-y-3$
10. $(3x+2y)^2-6x-4y$
11. $(2a+b)^2-4b-8a$
12. $x^2+xy+y-1$
13. $1-m^2-t-tm$
14. $4m^2-n^2+6m-3n$
15. $x^2-4xy+4y^2-z^2$
16. $p^2+q^2-2pq+q-p$

2.2 最高公因式与最低公倍式

最高公因式

比较 a^2b 及 ab^2 的因式，如下表所示。

单项式	因式							
a^2b	1	a	b	ab	a^2		a^2b	
ab^2	1	a	b	ab		b^2		ab^2

我们发现 a^2b 及 ab^2 的公因式是 1，a，b，ab，在这些公因式中，ab 是次数最高的公因式。

因此，ab 是 a^2b 及 ab^2 的最高公因式。

在公因式中次数最高的因式，叫做最高公因式 (H.C.F.)。

例题 1

求 $4p^2q^3$ 与 $12p^3q^2$ 的最高公因式。

解： $4p^2q^3 = 2^2 \times p^2 \times q^3$

$12p^3q^2 = 2^2 \times 3 \times p^3 \times q^2$

$\therefore$ 最高公因式是 $2^2 \times p^2 \times q^2$

$= 4p^2q^2$

例题 2

求 x^2+3x+2，x^2-x-6 及 x^2+x-2 的最高公因式。

解： $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$

$x^2-x-6=(x-3)(x+2)$

$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

$\therefore$ 最高公因式是 $x+2$。

例题 3

求 $3ab(a-b)^2(a+b)$，a^3-ab^2 及 $6a(a+b)^2$ 的最高公因式。

解： $3ab(a-b)^2(a+b)=a(a+b)\cdot 3b(a-b)^2$

$a^3-ab^2=a(a^2-b^2)=a(a+b)\cdot(a-b)$

$6a(a+b)^2=2\cdot 3a(a+b)^2$

$\therefore$ 最高公因式是 $a(a+b)$。

例题 4

求 $4x^2y$，$8x+12y$ 及 $5xy^2z$ 的最高公因式。

解： $4x^2y=2^2\times x^2\times y$

$8x+12y=2^2(2x+3y)$

$5xy^2z=5\times x\times y^2\times z$

$\therefore$ 最高公因式是 1。

注意

若在各式中除了1之外，没有其他共同的因式时，则其最高公因式是1。

随堂练习 7

求下列各式的最高公因式：

1. $27ab^2$，$12a^2b$，$24a^2b^2$
2. a^2-b^2，$2(a+b)$
3. $ab(a+3)(a+2)^2$，$a^3b^3(a+3)^2(a+2)^3$
4. x^2+5x+4，x^2-6x-7，$2x^2-7x-9$

练习 2.2a

求下列各式的最高公因式：

1. $17a$，$51a$
2. $8ab^2$，$10a^4b^3$
3. $9x^2yz$，$8x^3y^3z$
4. $14a^2b$，$42ab^2$，$28a^2b^2$
5. $12x(x+y)$，$18x^2y(x+y)$
6. $3b(a-c)$，$5a(a-c)^2$
7. c^2-d^2，$c(c-d)$
8. $x^2-2x-15$，$x^2+9x+18$，$x^2-7x-30$
9. $a^2-ab-2b^2$，$a^2+3ab+2b^2$
10. a^2+b^2+2ab，$(a+b)^3$，$a^2(a+b)-b^2(a+b)$

最低公倍式

比较 a^2b 及 ab^2 的倍式，如下表所示。

单项式	倍式										
a^2b	a^2b		a^2b^2	a^3b		a^3b^2	a^2b^3	a^4b		a^3b^3	…
ab^2		ab^2	a^2b^2		ab^3	a^3b^2	a^2b^3		ab^4	a^3b^3	…

我们发现 a^2b 及 ab^2 的公倍式是 a^2b^2，a^2b^3，a^3b^2，a^3b^3，…。在这些公倍式中，a^2b^2 是次数最低的公倍式；因此，a^2b^2 是 a^2b 及 ab^2 的最低公倍式。

在公倍式中次数最低的倍式，叫做最低公倍式(L.C.M.)。

例题 5

求 $4p^2q^3$ 与 $10p^3q^2$ 的最低公倍式。

解： $4p^2q^3 = 2^2 \times p^2 \times q^3$

$10p^3q^2 = 2 \times 5 \times p^3 \times q^2$

∴ 最低公倍式是 $2^2 \times 5 \times p^3 \times q^3$

$= 20p^3q^3$

例题 6

求 $3x(x+y)^2$，$x(x-y)^2$ 与 $2x(x^2-y^2)$ 的最低公倍式。

解： $3x(x+y)^2 = 3 \cdot x \cdot (x+y)^2$

$x(x-y)^2 = x \cdot (x-y)^2$

$2x(x^2-y^2) = 2 \cdot x \cdot (x+y) \cdot (x-y)$

∴ 最低公倍式是 $2 \times 3x(x+y)^2(x-y)^2$

$= 6x(x+y)^2(x-y)^2$

例题 7

求 x^2-x-6， x^2-4x+3 与 x^2+x-2 的最低公倍式。

解： $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$

$x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$

$x^2+x-2=(x+2)(x-1)$

$\therefore$ 最低公倍式是 $(x-3)(x+2)(x-1)$。

随堂练习 8

求下列各式的最低公倍式：

1. $3a^3b$， $27a^2b$， $6ab^2$
2. $2a^2-2ab$， a^2-b^2
3. x^2+2x-3， x^2+x-6， x^2-3x+2

练习 2.2b

求下列各式的最低公倍式：

1. $14st$， $21t$
2. $2a$， $4a$， $6a$
3. $4a^2b$， $10a^3b^2$
4. $2x^2yz^3$， $6x^3y^2z$， $12xyz$
5. $6t^2$， $3t(t-1)$
6. $4b^2-2ab$， $4b^2-a^2$
7. $x-1$， x^2-2x+1， $2x$
8. $2(x+y)$， $3(x+y)^2$， $4(x+y)^3$
9. p^2-q^2， $2p+2q$， $3p-3q$
10. $x^2+11x+18$， x^2+8x-9， x^2+x-2

总复习题 2

因式分解下列各式 (1 至 28)：

1. x^2y-xy^2
2. $1-16x^2$
3. $x^2+4x-45$
4. $\frac{1}{4}a^2-9$
5. y^2-y-72
6. $2x^2-12x+18$
7. $10+3a-a^2$
8. p^5+2p^3+p
9. $33+8a-a^2$
10. $6a^4-24a^2$
11. $xy+2y+3x+6$
12. $4-(a-3)^2$
13. $(a+b)^2-3a-3b$
14. $(4x+y)^2-(3x-2y)^2$
15. $2x^2-22x+48$
16. ax^2-9a
17. $3a^2b-3ab^2$
18. $xy-14-7y+2x$
19. $t^2+11t-26$
20. $3x^2-7x-10$
21. $6x^2-7xy-3y^2$
22. $(a-b)(a+2b)-2a+2b$
23. $12t^2-7t-10$
24. $14y^2+37y+24$
25. $2a^2+3a+1+a(a+1)$
26. $16x^4-1$
27. $2m^2-8n^2+m-2n$
28. $16x^2-100$

求下列各式的最高公因式及最低公倍式 (29 至 32)：

29. a^3b^2， a^2b^3， ab^4
30. $16x^2(x-1)$， $8x(x-1)^2$
31. y^2+yx， x^2+xy
32. y^2+2y+1， y^2-1， $3y+3$

3 平方根与立方根

学习目标

- 能进行平方根与立方根的计算
- 知道有理数与无理数的定义
- 能进行二次根式的化简
- 能进行二次根式的四则运算



3.1 平方根与算术平方根及其性质

平方根及算术平方根的定义

我们知道，3与-3的平方都等于9，即$3^2=9$，$(-3)^2=9$。因此，我们就说3与-3是9的平方根。

> 如果$x^2=a$，$(a\geq 0)$，那么x就叫做a的平方根(二次方根)。

例如：$5^2=25$，$(-5)^2=25$，5与-5是25的平方根。

$\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$，$\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$，$\frac{2}{3}$与$-\frac{2}{3}$是$\frac{4}{9}$的平方根。

$0^2=0$，0是0的平方根。

由于正数的平方是正数，负数的平方也是正数，而零的平方是零，所以任何数的平方都不可能是负数。

> - 一个正数有两个平方根，这两个平方根互为相反数。
> - 零只有一个平方根，即零。
> - 负数没有平方根。

求一个非负数a的平方根的运算，叫做开平方。一个正数a的正平方根也叫做算术平方根，用符号“$\sqrt{a}$”表示，读作根号a；负平方根用符号“$-\sqrt{a}$”表示，读作负根号a，其中a是被开方数。例如：25的平方根是$\sqrt{25}=5$与$-\sqrt{25}=-5$，简记作$\pm\sqrt{25}=\pm 5$。

注意

$\sqrt{25}\neq\pm 5$

例题 1

求下列各数的平方根：

(a) 36　　(b) 121　　(c) 0.49

(d) 1.44　　(e) $\frac{16}{49}$　　(f) $2\frac{1}{4}$

解： (a) $\because\ 6^2=36$，$(-6)^2=36$

$\therefore$ 36的平方根是 6 与 -6，即 $\pm\sqrt{36}=\pm6$

(b) 121的平方根是 $\pm\sqrt{121}=\pm11$

(c) $\because\ 0.7^2=0.49$

$\therefore$ 0.49 的平方根是 $\pm\sqrt{0.49}=\pm0.7$

(d) 1.44 的平方根是 $\pm\sqrt{1.44}=\pm1.2$

(e) $\frac{16}{49}$ 的平方根是 $\pm\sqrt{\frac{16}{49}}=\pm\frac{4}{7}$

(f) $2\frac{1}{4}$ 的平方根是 $\pm\sqrt{2\frac{1}{4}}=\pm\sqrt{\frac{9}{4}}$

$=\pm\frac{3}{2}$

注意

先将带分数化为假分数后，才开平方。

例题 2

求下列各式的值：

(a) $\sqrt{10000}$ (b) $-\sqrt{169}$

(c) $\sqrt{0.0001}$ (d) $-\sqrt{1.96}$

解： (a) $\sqrt{10000}=100$

(b) $-\sqrt{169}=-13$

(c) $\sqrt{0.0001}=0.01$

(d) $-\sqrt{1.96}=-1.4$

例题 3

求下列各数的算术平方根：

(a) 81 (b) 64

(c) 0.25 (d) $\frac{49}{100}$

解： (a) 81 的算术平方根是 $\sqrt{81}=9$

(b) 64 的算术平方根是 $\sqrt{64}=8$

(c) 0.25 的算术平方根是 $\sqrt{0.25}=0.5$

(d) $\frac{49}{100}$ 的算术平方根是 $\sqrt{\frac{49}{100}}=\frac{7}{10}$

随堂练习 1

1. 求下列各数的平方根：

(a) 9　　(b) 0.04　　(c) $\frac{1}{25}$　　(d) $\frac{4}{81}$

2. 求下列各数的算术平方根：

(a) 1　　(b) 0.16　　(c) $\frac{4}{9}$　　(d) $1\frac{9}{16}$

练习 3.1a

1. 求下列各数的平方根：

(a) 16　　(b) 361　　(c) 400　　(d) 484

(e) 2500　　(f) $\frac{144}{289}$　　(g) $1\frac{7}{9}$　　(h) $2\frac{7}{9}$

(i) 0.0064　　(j) 1.69　　(k) 2.25　　(l) 2.89

2. 求下列各数的算术平方根：

(a) 1.21　　(b) 0.09　　(c) 1225　　(d) 0.81

(e) 0.0016　　(f) $\frac{1}{4}$　　(g) $\frac{169}{196}$　　(h) $7\frac{1}{9}$

3. 求下列各式的值：

(a) $-\sqrt{12100}$　　(b) $\sqrt{0.0121}$

(c) $\sqrt{2.56}$　　(d) $-\sqrt{\frac{16}{81}}$

(e) $\sqrt{4+\frac{25}{36}}$　　(f) $\sqrt{1-\frac{9}{25}}$

4. 已知 $c=\sqrt{a^2+b^2}$，若 $a=3$，$b=4$，求 c 的值。

5. 已知 $y=\sqrt{z^2-x^2}$，若 $x=7$，$z=25$，求 y 的值。

算术平方根的性质

由平方根的定义，我们知道 $\left(\sqrt{a}\right)^2=a\ (a\geq 0)$，例如：$\left(\sqrt{2}\right)^2=2$，$\left(\sqrt{5}\right)^2=5$。

又 $\sqrt{a^2}=|a|$，例如：$\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{2^2}=2$，$\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{5^2}=5$。

例题 4

计算下列各式：

(a) $\left(\sqrt{9}\right)^2$

(b) $\left(-\sqrt{13}\right)^2$

(c) $-\left(\sqrt{2.3}\right)^2$

(d) $-\left(-\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right)^2$

解： (a) $\left(\sqrt{9}\right)^2=9$

(b) $\left(-\sqrt{13}\right)^2=\left(\sqrt{13}\right)^2=13$

(c) $-\left(\sqrt{2.3}\right)^2=-2.3$

(d) $-\left(-\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right)^2=-\left(\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right)^2=-\dfrac{2}{5}$

例题 5

计算下列各式:

(a) $\sqrt{8^2}$　　(b) $\sqrt{1.23^2}$

(c) $\sqrt{(-7)^2}$　　(d) $\sqrt{\left(-\frac{4}{7}\right)^2}$

解: (a) $\sqrt{8^2}=8$

(b) $\sqrt{1.23^2}=1.23$

(c) $\sqrt{(-7)^2}=\sqrt{7^2}=7$

(d) $\sqrt{\left(-\frac{4}{7}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{4}{7}\right)^2}=\frac{4}{7}$

补充资料

$\sqrt{(-7)^2}=|-7|=7$

$\sqrt{(-7)^2}\neq-7$

由平方根的定义, $\sqrt{4\times9}=\sqrt{36}=6$

$\sqrt{4}\times\sqrt{9}=2\times3=6$

$\therefore\ \sqrt{4\times9}=\sqrt{4}\times\sqrt{9}$

即

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ \ (a\geq0,\ b\geq0)$$

又 $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$

$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3}$

$\therefore\ \sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$

即

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ \ (a\geq0,\ b>0)$$

例题 6

计算下列各式：

(a) $\sqrt{9\times25}$　　(b) $\sqrt{0.16\times0.81}$

(c) $\sqrt{\dfrac{4}{25}}$

解： (a) $\sqrt{9\times25}=\sqrt{9}\times\sqrt{25}$
$=3\times5$
$=15$

(b) $\sqrt{0.16\times0.81}=\sqrt{0.16}\times\sqrt{0.81}$
$=0.4\times0.9$
$=0.36$

(c) $\sqrt{\dfrac{4}{25}}=\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}}$
$=\dfrac{2}{5}$

例题 7

计算下列各式：

(a) $\sqrt{441}$　　(b) $\sqrt{1764}$

(c) $\sqrt{0.000121}$

解： (a) $\sqrt{441}=\sqrt{3^2\times7^2}$
$=3\times7$
$=21$

(b) $\sqrt{1764}=\sqrt{2^2\times3^2\times7^2}$
$=2\times3\times7$
$=42$

(c) $\sqrt{0.000121}=\sqrt{\dfrac{121}{1000000}}$
$=\sqrt{\dfrac{11^2}{1000^2}}$
$=\dfrac{11}{1000}$
$=0.011$

随堂练习 2

1. 计算下列各式：

(a) $\left(-\sqrt{23}\right)^2$

(b) $\left(\sqrt{\dfrac{5}{6}}\right)^2$

(c) $\sqrt{0.67^2}$

(d) $\sqrt{\left(-\dfrac{5}{6}\right)^2}$

2. 计算下列各式：

(a) $\sqrt{3\times12}$

(b) $\sqrt{0.81\times0.09}$

(c) $\sqrt{\dfrac{9}{625}}$

(d) $\sqrt{11\dfrac{1}{9}}$

练习 3.1b

1. 计算下列各式：

   (a) $\left(\sqrt{13}\right)^2$ (b) $\left(-\sqrt{7.1}\right)^2$ (c) $\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2$ (d) $-\left(\sqrt{3\frac{4}{5}}\right)^2$

2. 计算下列各式：

   (a) $\sqrt{4^2}$ (b) $\sqrt{3.21^2}$ (c) $\sqrt{(-0.1)^2}$ (d) $\sqrt{\left(-\frac{7}{10}\right)^2}$

3. 计算下列各式：

   (a) $\sqrt{0.25\times1.44}$ (b) $\sqrt{576\times676}$

   (c) $\sqrt{\frac{4}{9}\times\frac{49}{121}}$ (d) $\sqrt{\frac{36}{49}\times\frac{16}{49}}$

4. 计算下列各式：

   (a) $\sqrt{289}$ (b) $\sqrt{324}$ (c) $\sqrt{1024}$ (d) $\sqrt{1089}$

5. 求下列各式中x的值：

   (a) $x^2=144$ (b) $x^2=289$

   (c) $x^2=2.25$ (d) $x^2=\frac{25}{4}$

3.2 数的立方根

立方根的定义及计算

我们知道，4的立方等于64，即$4^3=64$。那么，4就叫做64的立方根。

> 如果$x^3=a$，那么x就叫做a的立方根(三次方根)。

例如：$2^3=8$，2是8的立方根。

$(-2)^3=-8$，-2是-8的立方根。

$0^3=0$，0是0的立方根。

- 任何数都只有一个立方根。
- 正数的立方根是正数，负数的立方根是负数，零的立方根是零。

求一个数a的立方根的运算，叫做开立方。一个数a的立方根用符号“$\sqrt[3]{a}$”表示，其中a是被开方数，3是根指数。

补充资料

1. 若$x^n=a$，则$x=\sqrt[n]{a}$，$a\geq 0$。
   - 当n为奇数时，a的奇次方根是唯一的。
   - 当n为偶数时，a的偶次方根有两个且互为相反数。
2. 根指数就是记在根号左上角以表明开方次数的数。当根指数是2时省略不写。

例题 1

求下列各数的立方根：

(a) 1　　(b) -27

(c) -0.216　　(d) $\frac{64}{125}$

解： (a) $\because\ 1^3=1$

$\therefore$ 1的立方根是1，即$\sqrt[3]{1}=1$。

(b) $\because\ (-3)^3=-27$

$\therefore$ -27的立方根是-3，即$\sqrt[3]{-27}=-3$。

(c) -0.216的立方根是$\sqrt[3]{-0.216}=-0.6$

(d) $\frac{64}{125}$的立方根是$\sqrt[3]{\frac{64}{125}}=\frac{4}{5}$

例题 2

求下列各式的值：

(a) $\sqrt[3]{-64}$　　(b) $\sqrt[3]{0.001}$

(c) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$　　(d) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$

解： (a) $\sqrt[3]{-64}=-4$

(b) $\sqrt[3]{0.001}=0.1$

(c) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}=-\frac{1}{2}$

(d) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}=\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$
$=\frac{3}{2}$

随堂练习 3

1. 求下列各数的立方根：

   (a) 125　　(b) -0.027

2. 求下列各式的值：

   (a) $\sqrt[3]{-1000}$　　(b) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$

练习 3.2

求下列各式的值：(1 至 16)

1. $\sqrt[3]{-1}$　　2. $\sqrt[3]{27}$　　3. $\sqrt[3]{-27}$　　4. $\sqrt[3]{216}$

5. $\sqrt[3]{343}$　　6. $\sqrt[3]{1331}$　　7. $\sqrt[3]{1728}$　　8. $-\sqrt[3]{8000}$

9. $\sqrt[3]{-0.512}$　　10. $\sqrt[3]{0.064}$　　11. $\sqrt[3]{\frac{54}{128}}$　　12. $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$

13. $\sqrt[3]{1+\frac{91}{125}}$　　14. $\sqrt[3]{\frac{7}{8}-1}$　　15. $\sqrt[3]{1-\frac{37}{64}}$　　16. $-\sqrt[3]{-125}$

17. 试完成下表：

x	0.000000001	0.000001	0.001	1	1000	1000000	1000000000
$\sqrt[3]{x}$							

求下列各式中 x 的值：(18 至 21)

18. $x^3=343$　　19. $x^3=0.729$

20. $x^3=-\frac{1}{27}$　　21. $x^3=-\frac{125}{512}$

3.3 有理数与无理数

任何一个分数，都可以写成有限小数或者循环小数的形式。

例如：$\frac{1}{2}=0.5$

$-\frac{3}{4}=-0.75$

$$\frac{1}{3}=0.333\ldots=0.3$$

$$\frac{13}{6}=2.1666\ldots=2.16$$

$$\frac{1}{7}=0.142857$$

反过来，任何有限小数和循环小数都可以写成分数。在现实中，我们会遇到不循环的无限小数。

例如：$\sqrt{2}=1.41421356\ldots$

$\sqrt{3}=1.73205080\ldots$

$\sqrt[3]{2}=1.25992104\ldots$

我们无法将不循环的无限小数写成分数。

能写成 $\frac{p}{q}$ (p 与 q 为整数，且 $q\neq0$) 形式的数，叫做分数或有理数。如 4，$-\frac{2}{3}$，5.6 都是有理数。不是有理数的实数，就叫做无理数。如 $\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$，$\sqrt{8}$，$\sqrt{\frac{2}{3}}$，$\sqrt[3]{5}$，$\sqrt[3]{9}$ 都是无理数。

数的分类

- 实数
  - 有理数
    - 有限小数
    - 循环小数
  - 无理数
    - 不循环的无限小数

3.4 二次根式的化简

我们用$\sqrt{a}$ $(a \geq 0)$表示非负数a的算术平方根。在实数范围内，若$a<0$，则$\sqrt{a}$没有意义。如$\sqrt{-2}$，$\sqrt{-\frac{2}{3}}$都是没有意义的。在本章里，二次根号内的变数都是非负数。

我们可以运用下列的性质化简二次根式：

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad (a \geq 0,\ b \geq 0)$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geq 0,\ b > 0)$$

例题 1

计算下列各式：

(a) $\sqrt{28 \times 63}$

(b) $\sqrt{16a^2}$

(c) $\sqrt{x^2y^4}$

(d) $\sqrt{\frac{9x^4}{25y^2}}$

解： (a) $\sqrt{28 \times 63} = \sqrt{2^2 \times 7 \times 3^2 \times 7}$
$= 2 \times 3 \times 7$
$= 42$

(b) $\sqrt{16a^2} = \sqrt{16} \times \sqrt{a^2}$
$= 4a$

(c) $\sqrt{x^2y^4}=\sqrt{x^2}\times\sqrt{y^4}$
$=xy^2$

注意

$y^4=(y^2)^2$

(d) $\sqrt{\dfrac{9x^4}{25y^2}}=\dfrac{\sqrt{9}\times\sqrt{x^4}}{\sqrt{25}\times\sqrt{y^2}}$
$=\dfrac{3x^2}{5y}$

例题 2

化简下列各式：

(a) $\sqrt{12}$　　(b) $\sqrt{32}$

(c) $\sqrt{90}$　　(d) $\sqrt{4x}$

解： (a) $\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}$
$=\sqrt{4}\times\sqrt{3}$
$=2\sqrt{3}$

(b) $\sqrt{32}=\sqrt{16\times2}$
$=\sqrt{16}\times\sqrt{2}$
$=4\sqrt{2}$

(c) $\sqrt{90}=\sqrt{9\times10}$
$=\sqrt{9}\times\sqrt{10}$
$=3\sqrt{10}$

(d) $\sqrt{4x}=\sqrt{4}\times\sqrt{x}$
$=2\sqrt{x}$

例题 3

化简下列各式：

(a) $\sqrt{147}$　　(b) $\sqrt{6\times 288}$　　(c) $\sqrt{\frac{175}{9}}$

解： (a) $\sqrt{147}=\sqrt{49\times 3}$
$=\sqrt{49}\times\sqrt{3}$
$=7\sqrt{3}$

(b) $\sqrt{6\times 288}=\sqrt{2\times 3\times 2^5\times 3^2}$
$=\sqrt{2^6\times 3^2\times 3}$
$=2^3\times 3\times\sqrt{3}$
$=24\sqrt{3}$

(c) $\sqrt{\frac{175}{9}}=\sqrt{\frac{25\times 7}{9}}$
$=\frac{5\sqrt{7}}{3}$

注意

$\frac{5\sqrt{7}}{3}$ 也可以写成 $\frac{5}{3}\sqrt{7}$，但是不可以写成 $1\frac{2}{3}\sqrt{7}$ 或 $1\frac{2\sqrt{7}}{3}$。

例题 4

化简下列各式：

(a) $\sqrt{a^3b}$　　(b) $\sqrt{75a^2}$　　(c) $\sqrt{\frac{4x^3}{49}}$

解： (a) $\sqrt{a^3b}=\sqrt{a^2\cdot ab}$
$=a\sqrt{ab}$

(b) $\sqrt{75a^2}=\sqrt{3\times 5^2\times a^2}$
$=5\sqrt{3}\,a$

(c) $\sqrt{\dfrac{4x^3}{49}} = \dfrac{\sqrt{4\times x^2\times x}}{\sqrt{49}}$

$= \dfrac{2x\sqrt{x}}{7}$

例题 5

已知 $\sqrt{2}=1.4142$，求 $\sqrt{8}$ 的值至小数二位。

解： $\sqrt{8}=\sqrt{4\times 2}$

$=2\times\sqrt{2}$

$=2\times 1.4142$

$=2.8284$

$=2.83$

随堂练习 4

1. 计算下列各式：

(a) $\sqrt{18\times 50}$

(b) $\sqrt{\dfrac{7\times 112}{9}}$

(c) $\sqrt{4a^2b^2}$

(d) $\sqrt{\dfrac{a^4}{25b^2}}$

2. 化简下列各式：

(a) $\sqrt{72}$

(b) $\sqrt{150}$

(c) $\sqrt{5a^3}$

(d) $\sqrt{a^2b^3}$

练习 3.4

化简下列各式：(1 至 16)

1. $\sqrt{48}$
2. $\sqrt{108}$
3. $\sqrt{343}$
4. $\sqrt{384}$
5. $\sqrt{45\times 80}$
6. $\sqrt{54\times 96}$
7. $\sqrt{15\times 27}$
8. $\sqrt{84\times 14}$
9. $\sqrt{100m}$
10. $\sqrt{64a^2}$
11. $\sqrt{12b^4}$
12. $\sqrt{125n^3}$
13. $\sqrt{27x^2y^2}$
14. $\sqrt{8x^3y^4}$
15. $\sqrt{\dfrac{x^2y^4}{81z^2}}$
16. $\sqrt{\dfrac{3x^2z^3}{y^4}}$

已知 $\sqrt{2}=1.4142$，$\sqrt{3}=1.7321$，$\sqrt{5}=2.2361$，求下列各式的值至小数二位。(17 至 19)

17. $\sqrt{12}$
18. $\sqrt{18}$
19. $\sqrt{20}$

3.5 二次根式的四则运算

加法与减法

如果两个根式的被开方数相同，它们就叫做同类根式。例如，$3\sqrt{2}$ 与 $5\sqrt{2}$ 是同类根式，而 $3\sqrt{2}$ 与 $3\sqrt{5}$ 不是同类根式。

二次根式相加减，是先将各项化简，再将同类根式合并。

注意

$\sqrt{2}+\sqrt{3}\neq\sqrt{5}$

$\sqrt{5}-\sqrt{3}\neq\sqrt{2}$

例题 1

计算下列各式：

(a) $5\sqrt{2}+12\sqrt{2}-8\sqrt{2}$

(b) $\sqrt{48}+\sqrt{12}-\sqrt{75}$

解： (a)
$$\begin{aligned}5\sqrt{2}+12\sqrt{2}-8\sqrt{2}&=(5+12-8)\sqrt{2}\\&=9\sqrt{2}\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\sqrt{48}+\sqrt{12}-\sqrt{75}&=\sqrt{4^2\times3}+\sqrt{2^2\times3}-\sqrt{5^2\times3}\\&=4\sqrt{3}+2\sqrt{3}-5\sqrt{3}\\&=\sqrt{3}\end{aligned}$$

例题 2

计算$3\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{3}\sqrt{5}-\sqrt{2}$。

解：
$$\begin{aligned}3\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{3}\sqrt{5}-\sqrt{2}&=\left(3+\frac{1}{3}\right)\sqrt{5}-\left(\frac{1}{2}+1\right)\sqrt{2}\\&=\frac{10}{3}\sqrt{5}-\frac{3}{2}\sqrt{2}\end{aligned}$$

例题 3

计算$\sqrt{18x}+\sqrt{8x}-\sqrt{2x}$。

解：
$$\begin{aligned}\sqrt{18x}+\sqrt{8x}-\sqrt{2x}&=\sqrt{3^2\times2x}+\sqrt{2^2\times2x}-\sqrt{2x}\\&=3\sqrt{2x}+2\sqrt{2x}-\sqrt{2x}\\&=4\sqrt{2x}\end{aligned}$$

随堂练习 5

计算下列各式：

1. $9\sqrt{2}-3\sqrt{2}-4\sqrt{2}$
2. $\sqrt{45}+\sqrt{125}+\sqrt{605}$
3. $2\sqrt{a}+\sqrt{a}-7\sqrt{a}$
4. $2\sqrt{3x}-\sqrt{27x}+4\sqrt{3x}$

练习 3.5a

1. 判断下列各等式是否正确：

   (a) $\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{6}$

   (b) $2\sqrt{2}+2\sqrt{3}=4\sqrt{5}$

   (c) $\sqrt{2x}+\sqrt{3x}=\sqrt{5x}$

   (d) $m\sqrt{x}+2n\sqrt{x}=(m+2n)\sqrt{x}$

   (e) $\sqrt{2m}+\sqrt{3n}=\sqrt{2m+3n}$

计算下列各式：(2至25)

2. $8\sqrt{2}-10\sqrt{2}+15\sqrt{2}$
3. $5\sqrt{3}+3\sqrt{3}-8\sqrt{3}$
4. $9\sqrt{7}-12\sqrt{7}-8\sqrt{7}$
5. $17\sqrt{5}+18\sqrt{3}+14\sqrt{5}-9\sqrt{3}$
6. $20\sqrt{3}-4\sqrt{3}-4\sqrt{2}+\frac{3}{5}\sqrt{2}$
7. $\sqrt{2}+\sqrt{8}$
8. $\sqrt{12}-\sqrt{3}$
9. $2\sqrt{20}-\sqrt{80}$
10. $\sqrt{27}+\sqrt{48}$
11. $\sqrt{45}-\sqrt{20}$
12. $3\sqrt{18}-2\sqrt{32}$
13. $2\sqrt{50}-3\sqrt{32}$
14. $\sqrt{50}-\sqrt{32}-\sqrt{18}$
15. $4\sqrt{63}+5\sqrt{7}-8\sqrt{28}$
16. $\sqrt{108}-\sqrt{48}+\sqrt{75}$
17. $2\sqrt{27}+\sqrt{12}-2\sqrt{48}$
18. $\sqrt{5}-\sqrt{125}+5\sqrt{20}$
19. $\sqrt{24}+\sqrt{54}-\sqrt{216}$

20. $\frac{1}{3}\sqrt{8}-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{18}$

21. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{2}{5}\sqrt{3}+\frac{1}{4}\sqrt{12}$

22. $\sqrt{p}-\sqrt{9p}+9\sqrt{p}$

23. $2\sqrt{2m}+2\sqrt{8m}-8\sqrt{2m}$

24. $\sqrt{32ab}+\sqrt{72ab}-\sqrt{18ab}$

25. $\sqrt{50x}-\sqrt{8y}-\sqrt{72x}-\sqrt{98y}$

乘法

我们知道 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ ($a\geq 0$, $b\geq 0$)；反过来，$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ ($a\geq 0$, $b\geq 0$)。我们可以运用这个性质来求二次根式的乘积。

例题 4

计算下列各式：

(a) $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$

(b) $\sqrt{3}\times\sqrt{6}$

(c) $\sqrt{2}\times\sqrt{12}$

(d) $\sqrt{2}\times\sqrt{32}$

(e) $\sqrt{18}\times\sqrt{125}$

(f) $\sqrt{96}\times 2\sqrt{12}$

解： (a) $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times 3}$
$=\sqrt{6}$

(b) $\sqrt{3}\times\sqrt{6}=\sqrt{3\times 6}$
$=\sqrt{3\times 3\times 2}$
$=3\sqrt{2}$

(c) $\sqrt{2}\times\sqrt{12}=\sqrt{2\times12}$
$=\sqrt{2\times2^2\times3}$
$=2\sqrt{6}$

(d) $\sqrt{2}\times\sqrt{32}=\sqrt{64}$
$=8$

(e) $\sqrt{18}\times\sqrt{125}=\sqrt{18\times125}$
$=\sqrt{2\times3^2\times5^3}$
$=3\times5\sqrt{2\times5}$
$=15\sqrt{10}$

(f) $\sqrt{96}\times2\sqrt{12}=2\sqrt{96\times12}$
$=2\sqrt{2^7\times3^2}$
$=2\times2^3\times3\sqrt{2}$
$=48\sqrt{2}$

例题 5

计算 $3\sqrt{2a}\times2\sqrt{8a}$。

解： $3\sqrt{2a}\times2\sqrt{8a}=6\sqrt{2a\times8a}$
$=6\sqrt{16a^2}$
$=6\times4a$
$=24a$

例题 6

计算下列各式：

(a) $\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$　　(b) $\sqrt{5}\left(\sqrt{12}+\sqrt{18}\right)$

解： (a) $\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$

$=3-\sqrt{3\times 2}$

$=3-\sqrt{6}$

(b) $\sqrt{5}\left(\sqrt{12}+\sqrt{18}\right)=\sqrt{5}\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)$

$=\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{3}+\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{2}$

$=2\sqrt{15}+3\sqrt{10}$

例题 7

计算下列各式：

(a) $\left(\sqrt{3x}+\sqrt{2x}\right)\left(\sqrt{3x}-\sqrt{2x}\right)$

(b) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$

(c) $\left(2\sqrt{3}-1\right)^2$

(d) $\left(7\sqrt{3}+4\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)$

解： (a) $\left(\sqrt{3x}+\sqrt{2x}\right)\left(\sqrt{3x}-\sqrt{2x}\right)=\left(\sqrt{3x}\right)^2-\left(\sqrt{2x}\right)^2$

$=3x-2x$

$=x$

(b) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+2\left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{3}\right)^2$

$=2+2\sqrt{6}+3$

$=5+2\sqrt{6}$

思考题

$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{5}$ 何者较大？

(c) $\left(2\sqrt{3}-1\right)^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2-2\left(2\sqrt{3}\right)(1)+(1)^2$

$=\left(2\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3}\right)-4\sqrt{3}+1$

$=12-4\sqrt{3}+1$

$=13-4\sqrt{3}$

(d) $\left(7\sqrt{3}+4\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)=7\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}-7\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}+4\sqrt{5}\cdot2\sqrt{3}-4\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}$

$=42-7\sqrt{15}+8\sqrt{15}-20$

$=22+\sqrt{15}$

随堂练习 6

计算下列各式：

1. $\sqrt{2}\times\sqrt{5}$
2. $\sqrt{3}\times\sqrt{15}$
3. $3\sqrt{2}\times2\sqrt{3}$
4. $\sqrt{2}\left(\sqrt{6}+\sqrt{10}\right)$

练习 3.5b

计算下列各式：

1. $\sqrt{2}\times\sqrt{6}$
2. $\sqrt{10}\times\sqrt{20}$
3. $5\sqrt{2}\times2\sqrt{5}$
4. $2\sqrt{8}\times3\sqrt{8}$

5. $\sqrt{12}\times\sqrt{\frac{1}{12}}$

6. $2\sqrt{45}\times\frac{1}{3}\sqrt{10}$

7. $\sqrt{12}\times\sqrt{18}$

8. $5\sqrt{2}\times\frac{1}{2}\sqrt{6}$

9. $3\sqrt{33}\times7\sqrt{77}$

10. $5\sqrt{12}\times\sqrt{14}$

11. $\sqrt{6}\times\sqrt{8}\times\sqrt{12}$

12. $\sqrt{3a}\times\sqrt{2b}\times\sqrt{\frac{2}{3}ab}$

13. $\sqrt{5}\left(5-\sqrt{20}\right)$

14. $\sqrt{15}\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)$

15. $\left(2\sqrt{75}-5\sqrt{12}\right)\sqrt{35}$

16. $\left(2\sqrt{a}-1\right)\times3\sqrt{a}$

17. $\sqrt{5x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{5}\right)$

18. $\left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{3}-1\right)$

19. $\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(2-3\sqrt{2}\right)$

20. $\left(5\sqrt{6}-7\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{6}-3\sqrt{2}\right)$

21. $\left(2\sqrt{10}-\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{2}+1\right)$

22. $\left(5\sqrt{7}+2\sqrt{5}\right)\left(5\sqrt{7}-2\sqrt{5}\right)$

23. $\left(3\sqrt{5}+4\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$

24. $\left(2\sqrt{a}+\sqrt{2b}\right)\left(2\sqrt{a}-\sqrt{2b}\right)$

25. $\left(\sqrt{5x}+\sqrt{2x}\right)\left(\sqrt{5x}-\sqrt{2x}\right)$

26. $\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)^2$

27. $\left(2\sqrt{6}-\sqrt{10}\right)^2$

28. $\left(\sqrt{x}+\sqrt{2y}\right)^2$

29. $\left(3\sqrt{x}-2\right)^2$

30. $\left(\sqrt{m+n}+\sqrt{m-n}\right)\left(\sqrt{m+n}-\sqrt{m-n}\right)$

除法

我们知道 $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$（$a\geq0$， $b>0$）；反过来，$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$（$a\geq0$，$b>0$）。我们可以运用这个性质来进行一些二次根式的除法运算。

例题 8

计算下列各式：

(a) $\sqrt{72} \div \sqrt{6}$　　(b) $\sqrt{2} \div \sqrt{10}$

解： (a) $$\begin{aligned}\sqrt{72} \div \sqrt{6} &= \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{6}} \\ &= \sqrt{\frac{72}{6}} \\ &= \sqrt{12} \\ &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned}\sqrt{2} \div \sqrt{10} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{10}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

一般上，当一个数的分母中含有二次根式时，我们可将它化成分母中不含二次根式的式子。

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

这种把分母中的根号去掉的过程叫做分母有理化。

例题 9

将下列各式的分母有理化：

(a) $\dfrac{20}{3\sqrt{5}}$　　　　(b) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{18}}$

解： (a)

$$\begin{aligned}\frac{20}{3\sqrt{5}}&=\frac{20\times\sqrt{5}}{3\sqrt{5}\times\sqrt{5}}\\&=\frac{20\sqrt{5}}{15}\\&=\frac{4\sqrt{5}}{3}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{18}}&=\sqrt{\frac{12}{18}}\\&=\sqrt{\frac{2}{3}}\\&=\sqrt{\frac{2\times3}{3\times3}}\\&=\frac{\sqrt{6}}{3}\end{aligned}$$

例题 10

计算$\left(5\sqrt{6}-4\sqrt{2}\right)\div\sqrt{3}$。

解：

$$\begin{aligned}\left(5\sqrt{6}-4\sqrt{2}\right)\div\sqrt{3}&=\frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{3}}-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\\&=5\sqrt{\frac{6}{3}}-\frac{4\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}\\&=5\sqrt{2}-\frac{4}{3}\sqrt{6}\end{aligned}$$

例题 11

计算 $\frac{3}{\sqrt{8}}-\frac{5}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{27}}$。

解：

$$\begin{aligned}\frac{3}{\sqrt{8}}-\frac{5}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{27}}&=\frac{3}{2\sqrt{2}}-\frac{5\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\\&=\frac{3\sqrt{2}}{4}-\frac{5\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{4\sqrt{3}}{9}\\&=\frac{7}{12}\sqrt{2}-\frac{7}{18}\sqrt{3}\end{aligned}$$

随堂练习 7

1. 将下列各式的分母有理化：

   (a) $\frac{1}{\sqrt{8}}$　　　(b) $\frac{6}{\sqrt{10}}$

2. 计算 $\left(3\sqrt{10}+5\sqrt{6}\right)\div\sqrt{2}$。

练习 3.5c

将下列各式的分母有理化：(1 至 6)

1. $\frac{4}{\sqrt{6}}$
2. $\frac{10}{\sqrt{5}}$
3. $\frac{2}{\sqrt{12}}$
4. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{40}}$
5. $\frac{2\sqrt{72}}{7\sqrt{27}}$
6. $4\sqrt{\frac{9}{32}}$

计算下列各式：(7 至 18)

7. $\sqrt{15}\div\sqrt{20}$

8. $3\sqrt{2}\div\sqrt{6}$

9. $\sqrt{6}\div2\sqrt{3}$

10. $3\sqrt{8}\div4\sqrt{12}$

11. $2\sqrt{63}\div3\sqrt{35}$

12. $\left(2\sqrt{6}+3\sqrt{2}\right)\div\sqrt{3}$

13. $\left(5\sqrt{15}+\sqrt{5}\right)\div\sqrt{5}$

14. $\frac{9}{\sqrt{18}}-6\sqrt{\frac{1}{8}}+\sqrt{50}$

15. $\frac{4}{\sqrt{5}}+\frac{1}{3}\sqrt{5}-\frac{1}{4}\sqrt{20}-\frac{3}{\sqrt{20}}$

16. $\frac{2}{5}\sqrt{5}+\frac{3}{2\sqrt{5}}-\sqrt{\frac{1}{45}}$

17. $\sqrt{\frac{2}{27}}-\frac{3}{\sqrt{6}}-2\sqrt{6}$

18. $\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{3}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{4}\sqrt{8}-\frac{2}{\sqrt{3}}$

要化简 $\frac{1}{\sqrt{3}+1}$，可利用平方差公式

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

将分母中的根号去掉，即将 $\frac{1}{\sqrt{3}+1}$ 的分子与分母分别乘以 $\sqrt{3}-1$，就可把分母有理化。

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{3}+1}&=\frac{\sqrt{3}-1}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}\\&=\frac{\sqrt{3}-1}{3-1}\\&=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\end{aligned}$$

例题 12

化简下列各式：

(a) $\dfrac{3}{\sqrt{2}+1}$　　(b) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3-\sqrt{3}}$

(c) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}$　　(d) $\dfrac{11+5\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$

解： (a)
$$\begin{aligned}\frac{3}{\sqrt{2}+1}&=\frac{3\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}\\&=\frac{3\sqrt{2}-3}{2-1}\\&=3\sqrt{2}-3\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\frac{2\sqrt{2}}{3-\sqrt{3}}&=\frac{2\sqrt{2}\left(3+\sqrt{3}\right)}{\left(3-\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)}\\&=\frac{6\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{9-3}\\&=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3}\quad \text{或} \quad \sqrt{2}+\frac{1}{3}\sqrt{6}\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}&=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{6}-2\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{6}+2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6}-2\sqrt{3}\right)}\\&=\frac{\sqrt{12}-2\sqrt{6}}{6-12}\\&=\frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{-6}\\&=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3}\quad \text{或} \quad \frac{1}{3}\sqrt{6}-\frac{1}{3}\sqrt{3}\end{aligned}$$

(d) $\dfrac{11+5\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=\dfrac{\left(11+5\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}$

$$=\frac{33-11\sqrt{5}+15\sqrt{5}-25}{9-5}$$

$$=\frac{8+4\sqrt{5}}{4}$$

$$=2+\sqrt{5}$$

例题 13

已知 $\sqrt{2}=1.4142$， $\sqrt{3}=1.7321$， 求下列各式的值至小数二位：

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

解： (a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{1.4142}{2}$$

$$=0.7071$$

$$\approx 0.71$$

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}$$

$$=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

$$=1.7321+1.4142$$

$$=3.1463$$

$$\approx 3.15$$

随堂练习 8

化简下列各式：

1. $\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$

2. $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

3. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+2}$

练习 3.5d

化简下列各式：(1至14)

1. $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$

2. $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}$

3. $\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}$

4. $\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}$

5. $\dfrac{3}{\sqrt{7}-2}$

6. $\dfrac{\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}$

7. $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$

8. $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

9. $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

10. $\dfrac{3-\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$

11. $\dfrac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

12. $\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$

13. $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$

14. $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

已知$\sqrt{2}=1.4142$，$\sqrt{3}=1.7321$，$\sqrt{5}=2.2361$，求下列各式的值至小数二位。(15至20)

15. $\dfrac{9}{\sqrt{3}}$

16. $\dfrac{2}{\sqrt{18}}$

17. $\dfrac{20}{3\sqrt{5}}$

18. $\dfrac{2}{2+\sqrt{2}}$

19. $\dfrac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+1}$

20. $\dfrac{6}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

总复习题 3

求下列各式的值：(1至6)

1. $\pm\sqrt{\dfrac{1}{256}}$

2. $\pm\sqrt{6.76}$

3. $\sqrt{9+16}$

4. $\sqrt{625-400}$

5. $-\sqrt{1\dfrac{9}{16}}$

6. $\pm\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{4}{9}}$

求下列各数的算术平方根：(7至12)

7. 0.000196

8. 0.0036

9. 6084

10. 129600

11. 4000000

12. $1\dfrac{64}{225}$

求下列各式的值：(13至16)

13. $\left(-\sqrt{6}\right)^2$

14. $-\left(\sqrt{3\dfrac{1}{2}}\right)^2$

15. $-\sqrt{543^2}$

16. $-\sqrt{\left(-\dfrac{1}{7}\right)^2}$

求下列各式中x的值：(17至19)

17. $x^2=4.41$

18. $x^2=0.0009$

19. $x^2=\dfrac{1}{22500}$

求下列各式的值：(20至22)

20. $-\sqrt[3]{64}$

21. $\sqrt[3]{64000000}$

22. $\sqrt[3]{-0.064}$

求下列各式中 x 的值：(23 至 24)

23. $x^3=-1000$

24. $x^3=0.512$

计算下列各式：(25 至 54)

25. $\sqrt{245\times845}$

26. $\sqrt{\dfrac{324}{121\times169}}$

27. $\sqrt{\dfrac{8}{45}\times\dfrac{18}{125}}$

28. $\sqrt{500a^3b^4}$

29. $\sqrt{\dfrac{150n^5}{m^2}}$

30. $3\sqrt{18}-2\sqrt{8}+8\sqrt{2}$

31. $3\sqrt{20}-\sqrt{125}-2\sqrt{45}$

32. $\dfrac{1}{3}\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\sqrt{27}-\dfrac{1}{4}\sqrt{243}$

33. $-\dfrac{1}{4}\sqrt{6}+\dfrac{3}{8}\sqrt{24}+\dfrac{1}{2}\sqrt{54}$

34. $2\sqrt{2x}-\sqrt{75y}-\sqrt{50x}+5\sqrt{3y}$

35. $2\sqrt{10}\times3\sqrt{15}$

36. $\left(\sqrt{75}-\sqrt{48}\right)\sqrt{27}$

37. $\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6}+1\right)$

38. $\left(2\sqrt{2}-3\right)^2\left(2\sqrt{2}+3\right)$

39. $\left(\sqrt{27}+2\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{3}-\sqrt{8}\right)$

40. $\left(3\sqrt{2a}+\sqrt{3b}\right)\left(3\sqrt{2a}-\sqrt{3b}\right)$

41. $\left(2x+3\sqrt{2}\right)^2$

42. $\left(\sqrt{63y}-\sqrt{28y}\right)^2$

43. $2\sqrt{180}\div3\sqrt{80}$

44. $\dfrac{4\sqrt{3}+9\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

45. $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

46. $\dfrac{\sqrt{7}}{3}-\dfrac{\sqrt{28}}{4}-\dfrac{6}{\sqrt{63}}+\dfrac{3}{\sqrt{7}}$

47. $\dfrac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

48. $\dfrac{7}{6-2\sqrt{2}}$

49. $\dfrac{\sqrt{3}}{5+2\sqrt{6}}$

50. $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{18}-\sqrt{8}}$

51. $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}{4+\sqrt{15}}$

52. $\dfrac{3-\sqrt{6}}{2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$

53. $\dfrac{2}{2-\sqrt{5}}+\dfrac{10-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

54. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}-\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

已知$\sqrt{2}=1.4142$，$\sqrt{3}=1.7321$，$\sqrt{5}=2.2361$，求下列各式的值至小数二位。(55至58)

55. $\dfrac{2}{3+\sqrt{5}}$

56. $\dfrac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

57. $\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

58. $\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-2\right)$

4 三角形

学习目标

- 知道三角形的分类
- 理解三角形的边角关系
- 理解三角形的内角和及外角与内角的关系
- 掌握全等三角形的判定及证明
- 掌握等腰三角形、等边三角形及直角三角形的性质



4.1 三角形

如图4-1所示，三角形是由三条线段连接在一起所围成的平面图形，这些线段称为三角形的边，边与边的交点称为顶点。图4-1的三角形的三个边为线段 AB，AC 及 BC，顶点为 A，B 及 C。

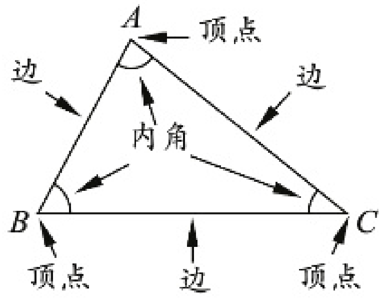


图4-1

我们用符号“Δ”来表示三角形。图4-1所示的三角形的顶点为 A，B 及 C，我们记作 ΔABC，读作三角形 ABC。

三角形相邻两边所组成的角叫做三角形的内角，简称为三角形的角。图4-1中，$\angle A$，$\angle B$ 及 $\angle C$ 为三角形的内角。

三角形的一边与它的一邻边的延长线所形成的角叫做三角形的外角。如图4-2所示，将 BC 延长至 D，则 $\angle ACD$ 是三角形 $\angle C$ 的外角。同样的，将 AC 延长至 E，$\angle BCE$ 也是 $\angle C$ 的外角。但是 $\angle ACD$ 与 $\angle BCE$ 是对顶角，它们的大小相等，所以我们只任取一个作为 $\angle C$ 的外角。$\angle A$ 及 $\angle B$ 不与 $\angle C$ 相邻，它们是外角 $\angle ACD$ 的内对角。

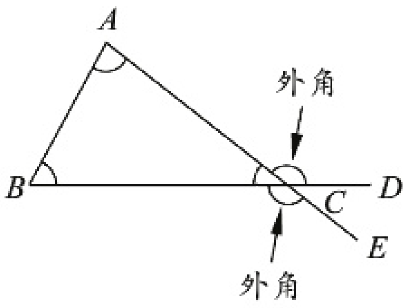


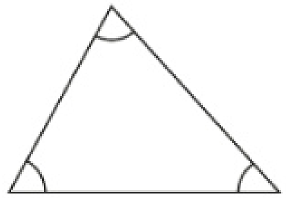
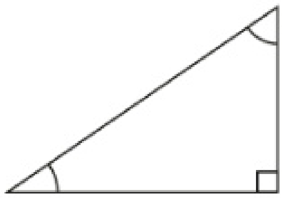
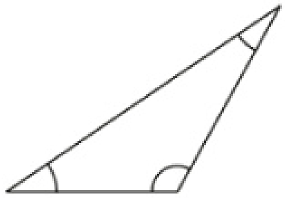
图4-2

思考题

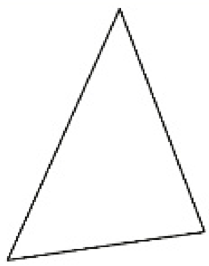
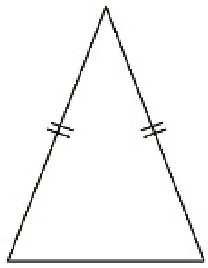
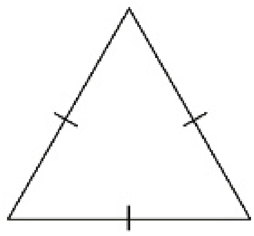
在图4-2中作 $\angle A$ 及 $\angle B$ 的外角。

三角形的分类

我们可按三角形内角的大小，将它们分为三类：

种类	锐角三角形	直角三角形	钝角三角形
例子			
内角	所有角为锐角	一个角为直角	一个角为钝角

除此之外，我们也可按三角形的边长来将它们分类：

种类	不等边三角形	等腰三角形	等边三角形
例子			
边	所有边都不相等	两个边相等	三个边都相等

角平分线、中线及垂线

如图4-3所示的 ΔABC 中，点 D、M、H 在直线 BC 上，

- AD 平分 $\angle A$，我们称线段 AD 为 ΔABC 中 $\angle A$ 的角平分线。
- 点 M 是线段 BC 的中点，我们称线段 AM 为 BC 边上的中线。
- $AH \perp BC$，我们称线段 AH 为 BC 边上的高线，简称高。

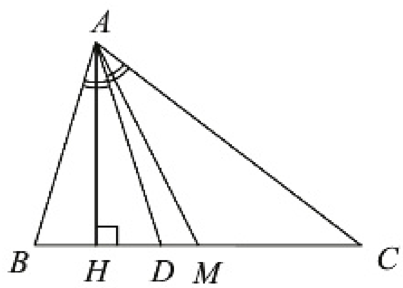
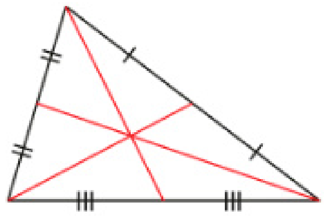
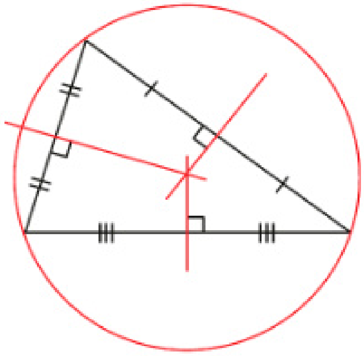
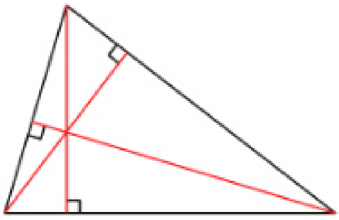
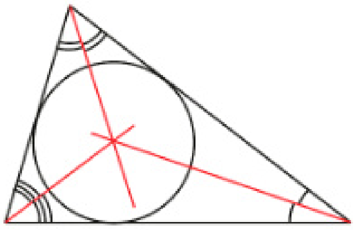
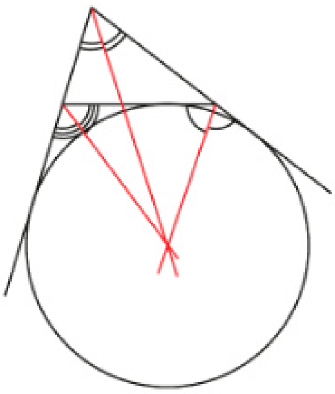


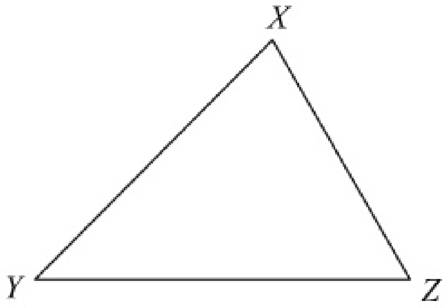
图4-3

三角形的五心

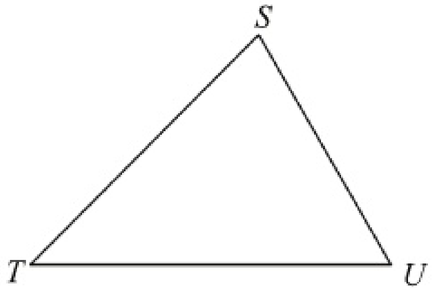
重心	三角形的三条中线会相交于一点，这点叫做重心。 若 ΔABC 是一个密度均匀的三角板，则重心是该三角板的平衡点。	
外心	三角形三个边的垂直平分线会相交于一点，这点叫做外心。 以外心为圆心，可作一个圆通过三角形的三个顶点，这个圆称为三角形的外接圆。	
垂心	三角形的三条高线会相交于一点，这点叫做垂心。	
内心	三角形的三条角平分线会相交于一点，这点叫做内心。 以内心为圆心，可作一个圆，它与三个边都只相交于一点，这个圆称为三角形的内切圆。	
旁心	三角形的其中一个角的平分线与另两个角的外角平分线会相交于一点，这点叫做旁心。 以旁心为圆心，可作一个圆，它与三个边都只相交于一点，这个圆称为三角形的旁切圆。	

随堂练习 1

1. 在右图中画出 ΔXYZ 的三条中线。



2. 在右图中画出 ΔSTU 的三个边上的高。



三角形三边的关系

一般上，我们以 a，b，c 表示 ΔABC 中 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 所对的边 BC，AC，AB，也代表它们的长度，如图4-4所示。

由于连接两点的线中，直线段最短，因此，

$$b+c>a$$
$$a+c>b$$
$$a+b>c$$

即

三角形任何两边的和大于第三边

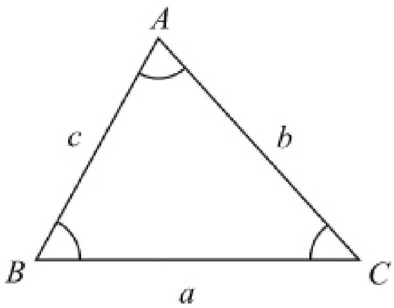


图4-4

例题 1

下列长度的三条线段是否能组成一个三角形？为什么？

(a) 4 cm，5 cm，6 cm

(b) 3 cm，4 cm，8 cm

(c) 2 cm，5 cm，7 cm

解：(a) $\because\ 4+5>6$，

$\therefore$ 长度为4 cm，5 cm，6 cm的三条线段能组成一个三角形。

(b) $\because\ 3+4<8$，

$\therefore$ 长度为3 cm，4 cm，8 cm的三条线段不能组成一个三角形。

(c) $\because\ 2+5=7$，

$\therefore$ 长度为2 cm，5 cm，7 cm的三条线段不能组成一个三角形。

思考题

当我们要证明三条线段能组成一个三角形时，只需证明比较短的两边的和大于第三边。试想想为什么？

三角形的边角关系

图4-5所示为ΔABC。用量角器量出$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的度数，然后用直尺量出a，b，c的长度，将结果填在表1：

$\angle A$		a	
$\angle B$		b	
$\angle C$		c	

表1

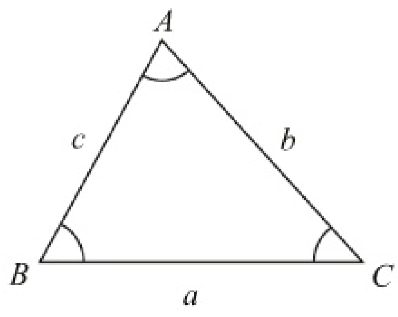


图4-5

我们发现，

$\angle A > \angle B > \angle C$

$a > b > c$

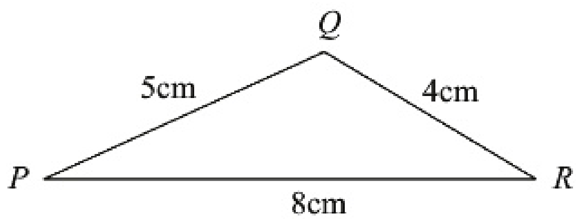
事实上，我们有以下的关系：

在一个三角形中，大边对大角，大角对大边。

我们将在后面才证明这个关系。

例题 2

已知 ΔPQR 中，$PQ = 5\text{ cm}$，$QR = 4\text{ cm}$，$PR = 8\text{ cm}$，比较 $\angle P$，$\angle Q$，$\angle R$ 的大小。



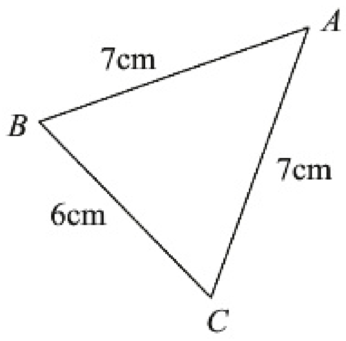
解： 由大边对大角可得

$\angle Q > \angle R > \angle P$

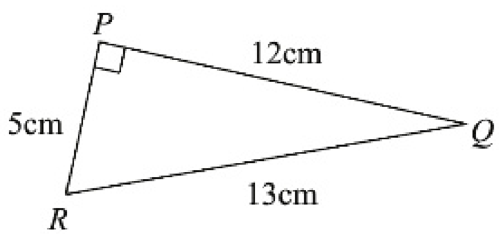
随堂练习 2

1. 参阅下列各三角形，并回答问题。

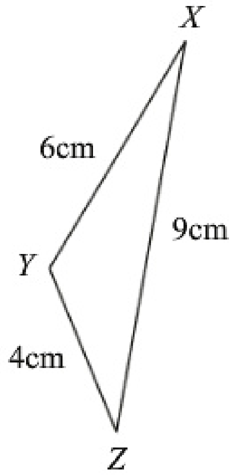
(i)



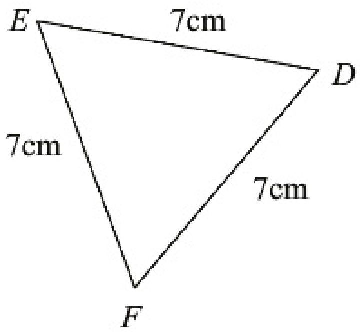
(ii)



(iii)



(iv)



(a) 考虑角的大小，指出各三角形是属于锐角，钝角还是直角三角形。

(b) 考虑边的大小，指出各三角形是属于不等边，等腰还是等边三角形。

2. 下列长度的三条线段是否能组成一个三角形？为什么？

(a) 7 cm，8 cm，15 cm

(b) 8 cm，3 cm，2 cm

(c) 8 cm，2 cm，7 cm

3. 已知 ΔXYZ 中，$\angle Y < \angle X < \angle Z$，比较三个边的大小。

练习 4.1

1. 下列长度的三条线段是否能组成一个三角形？为什么？

(a) 13 cm，8 cm，7 cm

(b) 5 cm，14 cm，9 cm

(c) 25 cm，24 cm，7 cm

(d) 15 cm，7 cm，7 cm

2. 已知 ΔABC 中，$AB = 5\text{ cm}$，$AC = 3\text{ cm}$，求 BC 边的长度的范围。

3. 已知 ΔXYZ 中，$XY = 9\text{ cm}$，$YZ = 2\text{ cm}$，求 XZ 边的长度的范围。

4. 已知 ΔXYZ 中，$XY = 13\text{ cm}$，$YZ = 18\text{ cm}$，$XZ = 15\text{ cm}$，比较 $\angle X$，$\angle Y$，$\angle Z$ 的大小。

5. 在下列 ΔABC 中，写出最大及最小的角：

   (a) $AB = 25$ cm， $AC = 26$ cm， $BC = 19$ cm

   (b) $AB = 7$ cm， $AC = 6$ cm， $BC = 9$ cm

6. 已知 ΔABC 中三个边的长度为 7 cm，13 cm 及 12 cm。若 $\angle A < \angle C < \angle B$，则 AB 的长度是多少？

4.2 三角形的内角与外角

三角形的内角和

试用量角器量出图4-6中 $\angle A$， $\angle B$， $\angle C$ 的度数，并将这三个度数加起来：

$\angle A$	
$\angle B$	
$\angle C$	
总和	

表2

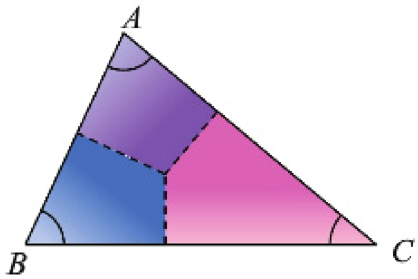


图4-6

你得到什么结果？

我们将三角形沿着虚线剪开，然后将三个角并在一起，如图4-7所示。结果我们会发现，这三个角合起来组成一个平角。因此，

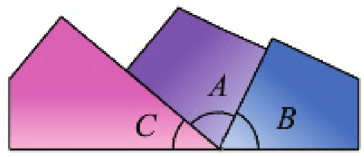


图4-7

三角形三个内角的和等于180°。

事实上，我们可用下列的方式来理解为什么∠A，∠B，∠C会并合成一个平角。如图4-8所示，延长线段BC至点D，作直线CE与直线AB平行。则∠ACE与∠A是内错角，因此相等；而∠ECD与∠B是同位角，因此也相等。

$$\begin{aligned}\therefore\quad \angle A+\angle B+\angle C &= \angle ACE+\angle ECD+\angle ACB\\ &= \angle BCD\\ &= 180^\circ\end{aligned}$$

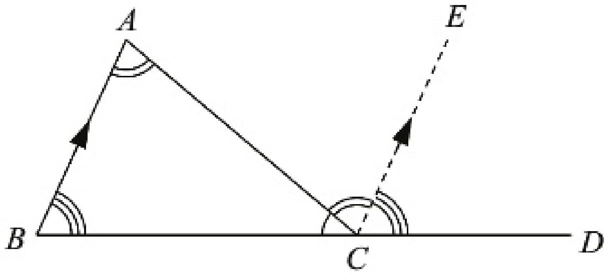


图4-8

思考题

1. 一个三角形可以有两个直角吗？为什么？
2. 一个三角形中最多有几个钝角？为什么？

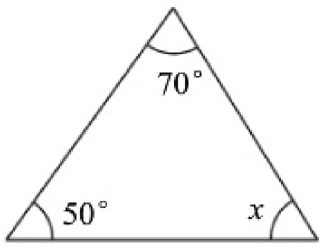
思考题

一个三角形三个外角的和是多少？

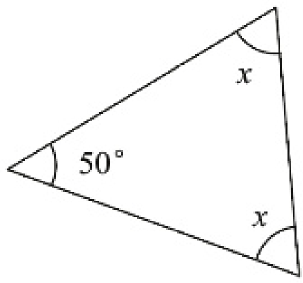
例题 1

下列各图中，求x。

(a)



(b)



解： (a) $x+50^\circ+70^\circ=180^\circ$

$x=180^\circ-50^\circ-70^\circ$

$\therefore\quad =60^\circ$

(b) $x+x+50°=180°$

$2x=180°-50°$

$=130°$

$\therefore \quad x=65°$

例题 2

在 ΔABC 中，

(a) $\angle C=54°$， $\angle A=\angle B$， 求 $\angle A$。

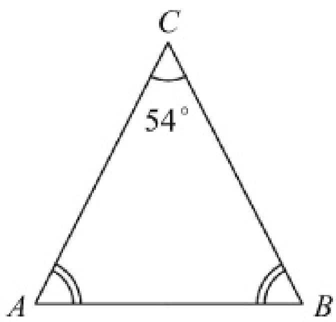
(b) $\angle A=2\angle B$， $\angle C=63°$， 求 $\angle A$。

解： (a) $\angle A+\angle B+54°=180°$

$\angle A+\angle A=180°-54°$

$\therefore \quad 2\angle A=126°$

$\angle A=63°$



(b) $\angle A+\angle B+63°=180°$

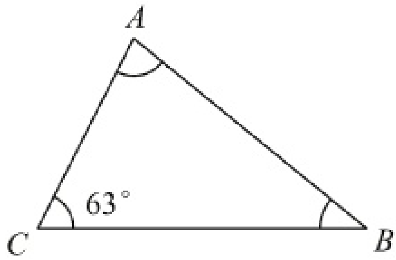
$2\angle B+\angle B=180°-63°$

$3\angle B=117°$

$\angle B=39°$

$\therefore \quad \angle A=2\times 39°$

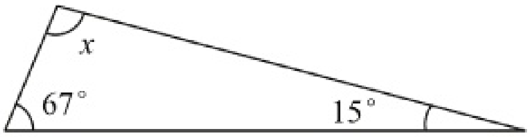
$=78°$



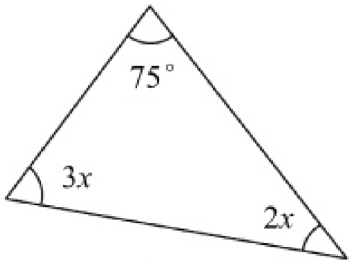
随堂练习 3

1. 下列各图中，求 x。

(a)



(b)

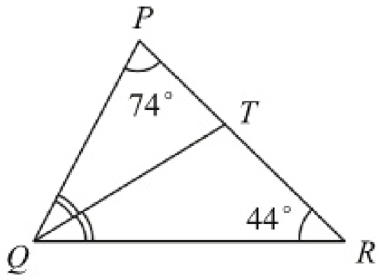


2. 在 ΔABC 中，

(a) $\angle A=\angle B=\angle C$，求 $\angle B$。

(b) $\angle A-\angle C=15°$，$\angle B=65°$，求 $\angle A$。

3. 如右图所示，QT 为 $\angle PQR$ 的平分线。已知 $\angle P=74°$，$\angle R=44°$，求 $\angle QTR$。



三角形的外角与内角的关系

如图4-9所示，ΔABC 中，$\angle ACD$ 是 $\angle ACB$ 的外角，因此

$\angle ACD+\angle ACB=180°$ ………………… (1)

另外，由于三角形的内角的和等于180°，

$\angle A+\angle B+\angle ACB=180°$ ……………… (2)

比较 (1) 及 (2) 得

$\angle ACD=\angle A+\angle B$

即

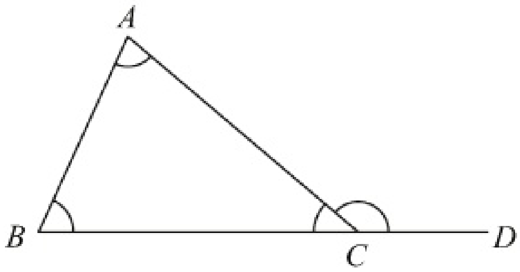


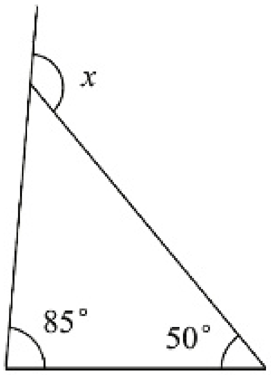
图4-9

> 三角形的外角等于它的两个内对角之和。

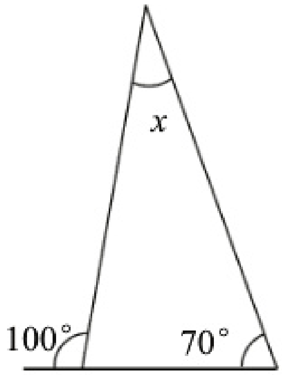
例题 3

下列各图中，求 x。

(a)



(b)



解： (a) $x = 85° + 50°$ (外角 = 内对角之和)

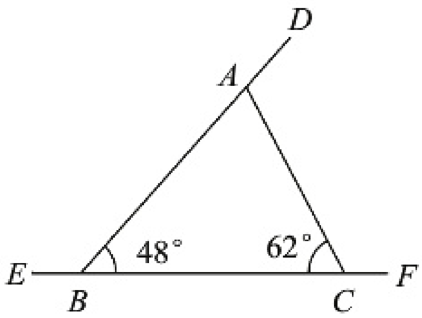
$= 135°$

(b) $x + 70° = 100°$ (外角 = 内对角之和)

$\therefore\ x = 30°$

例题 4

在 ΔABC 中，若 $\angle ABC = 48°$，$\angle ACB = 62°$，求 ΔABC 各外角的度数。



解： $\angle CAD = 48° + 62°$ (外角 = 内对角之和)

$= 110°$

$\angle ABE + 48° = 180°$

$\therefore\ \angle ABE = 132°$

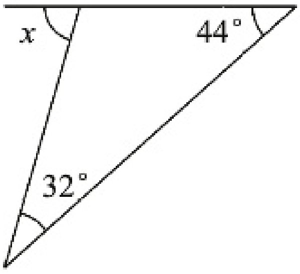
$\angle ACF + 62° = 180°$

$\therefore\ \angle ACF = 118°$

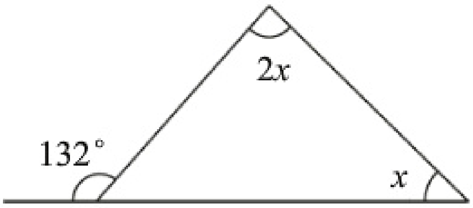
随堂练习 4

1. 下列各图中，求 x：

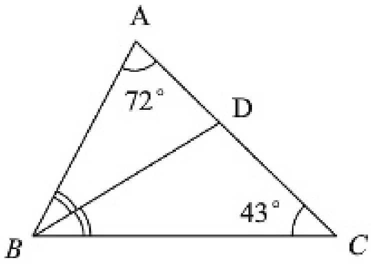
(a)



(b)



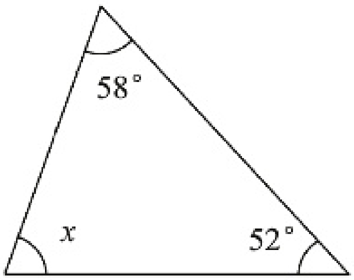
2. 如右图所示，BD 为 $\angle ABC$ 的平分线。已知 $\angle ADB = 72°$，$\angle DCB = 43°$，求 $\angle ABC$ 及 $\angle BAC$。



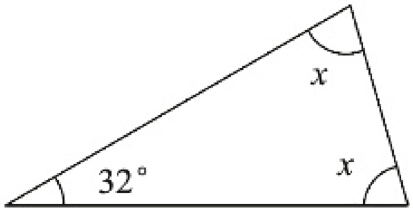
练习 4.2

1. 下列各图中，求 x，y 及 z：

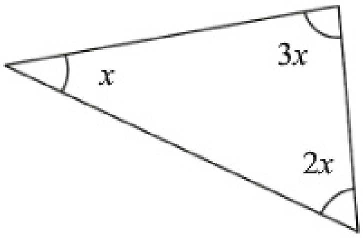
(a)



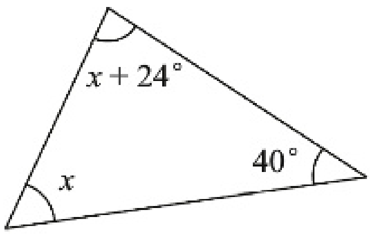
(b)



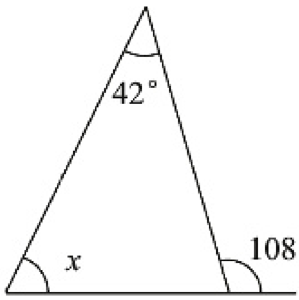
(c)



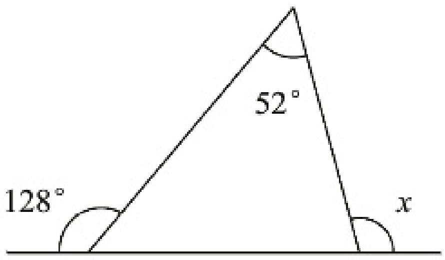
(d)



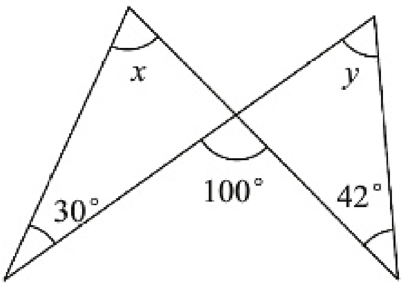
(e)


42°
x
108°

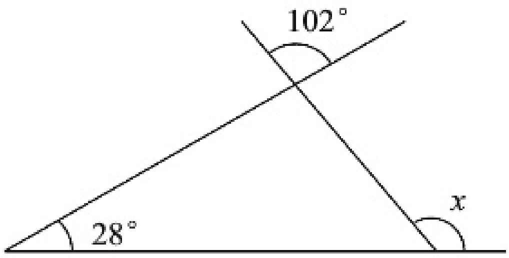
(f)


52°
128°
x

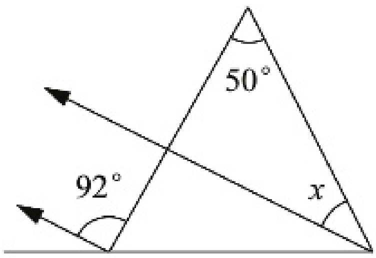
(g)


x
y
30°
100°
42°

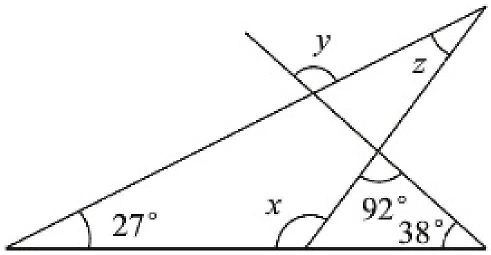
(h)


102°
x
28°

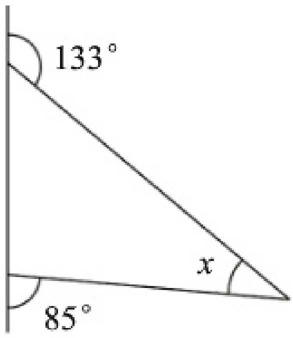
(i)


50°
92°
x

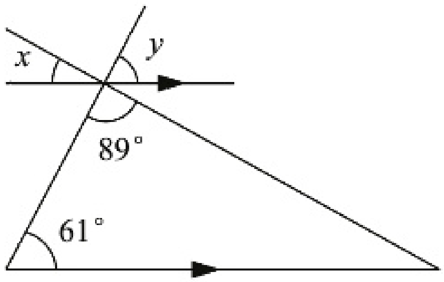
(j)


y
z
27°
x
92°
38°

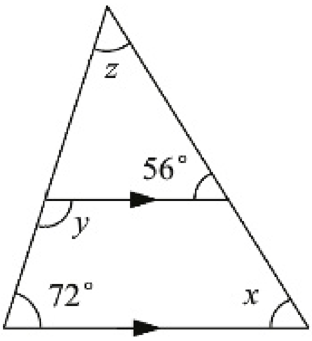
(k)


133°
x
85°

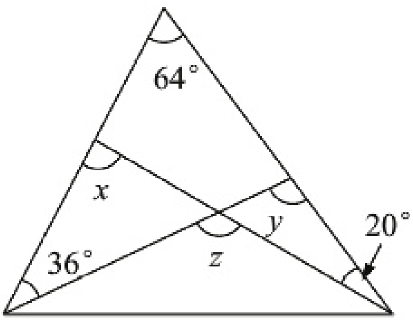
(l)


x
y
89°
61°

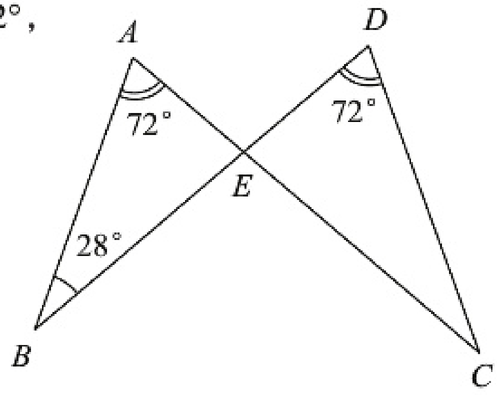
(m)


z
56°
y
72°
x

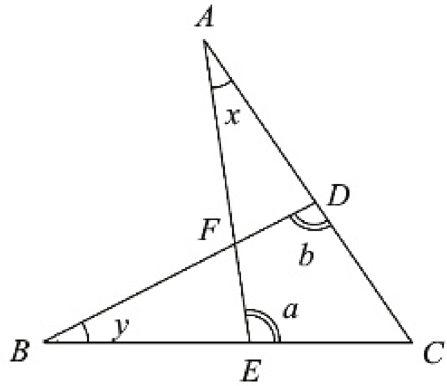
(n)


64°
x
y
20°
36°
z

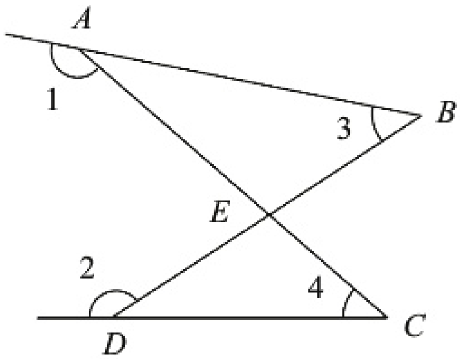
2. 已知ΔABC中，$\angle A=67°$，$\angle B=82°$，比较AB，BC及CA三个边的大小。
3. 已知ΔABC的其中两个角的度数为59°及61°。若AB为最长的边，求$\angle C$的度数。
4. 在ΔABC中，
   (a) $\angle A=54°$，$\angle B=2\angle C$，求$\angle B$。
   (b) $\angle A=3\angle C$，$\angle B=64°$，求$\angle A$。
   (c) $\angle A=105°$，$\angle B$比$\angle C$小9°，求$\angle B$与$\angle C$。
5. 如右图所示，AEC及BED为直线，$\angle A=\angle D=72°$，$\angle B=28°$，求$\angle C$。



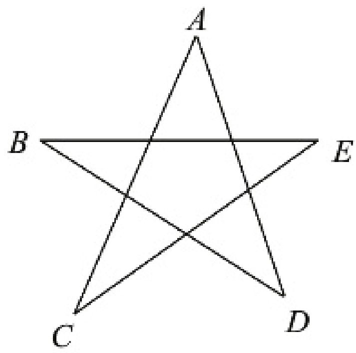
6. 如右图所示，AFE及BFD为直线。已知$\angle a=\angle b$，证明$\angle x=\angle y$。



7. 如右图所示，AEC及BED为直线。证明$\angle 1-\angle 2=\angle 3-\angle 4$。



8. 如右图所示，直线AD，DB，BE，EC，CA围成一个五角星。求$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E$。



4.3 全等三角形

在日常生活中，我们经常看到相同形状及大小的图形，如图4-10所示的数枚相同面值的邮票。在数学上，我们称这些图形为全等图形。两个全等图形放在一起能够完全重合。



图4-10

能够完全重合的两个平面图形叫做全等图形。重合的顶点叫做对应顶点，重合的边叫做对应边，重合的角叫做对应角。

如图4-11所示的ΔABC与ΔDEF能够完全重合，它们是全等三角形，我们用

$\Delta ABC\cong\Delta DEF$ 或 $\Delta ABC\equiv\Delta DEF$

来表示。

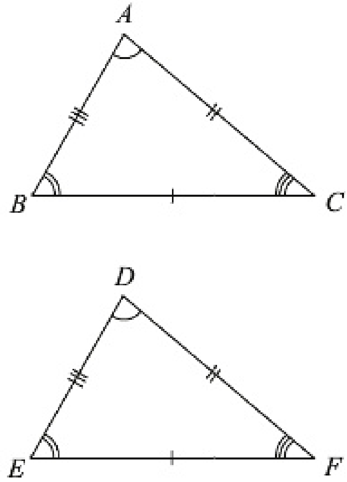


图4-11

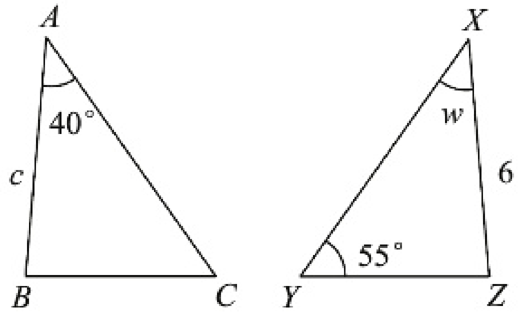
在本书中，我们将对应顶点的字母写在对应的位置上。例如$\Delta ABC\cong\Delta DEF$表示点$A$与点$D$，点$B$与点$E$，点$C$与点$F$是对应顶点。同样的，我们也可用$\Delta BAC\cong\Delta EDF$或$\Delta CAB\cong\Delta FDE$来表示这对三角形全等。

由定义可知，

全等三角形的对应边相等，对应角相等。

例题 1

右图中，已知$\Delta ABC \cong \Delta XZY$，求$w$及$c$。



解： $\angle X = \angle A$　(对应角相等)

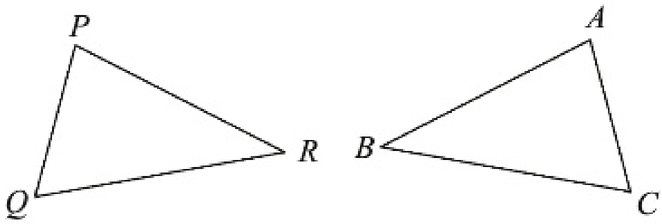
$w = 40°$

$AB = XZ$　(对应边相等)

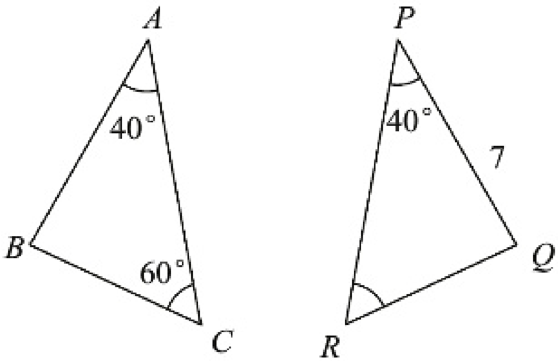
$c = 6$

随堂练习 5

1. 右图中，已知$\Delta PQR \cong \Delta CAB$，写出各组对应边及对应角。

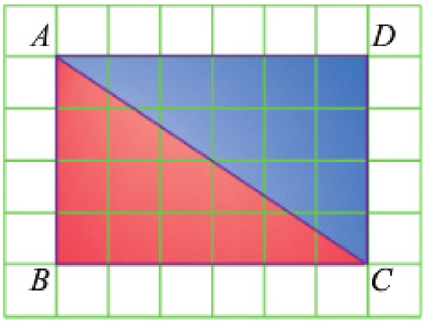


2. 右图中，$\Delta ABC \cong \Delta PQR$。求
   (a) $\angle B$，$\angle Q$及$\angle R$；
   (b) AB。

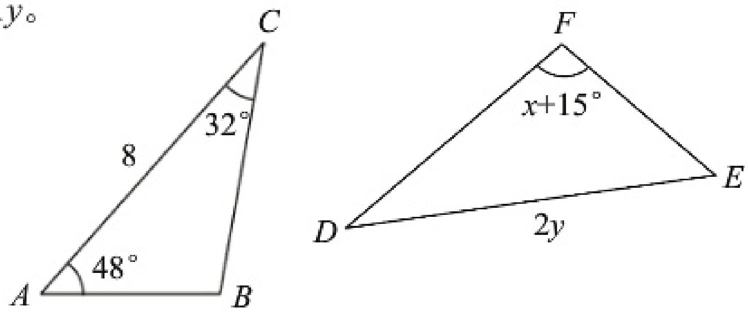


练习 4.3a

1. 右图中，按对应顶点的顺序写出一对全等三角形的名称，并写出各组对应边及对应角。



2. 右图中，$\Delta ABC \cong \Delta EFD$。求$x$及$y$。



全等三角形的判定

根据定义，两个三角形全等，则它们的对应边相等，对应角相等。

三个边分别相等，三个角分别相等一共有六个条件，我们是否一定要检查完所有这六个条件都满足，才能证明两个三角形全等呢？以下我们来探讨这一问题。

边边边定理 (SSS)

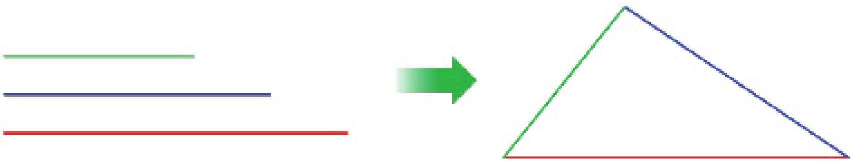


图 4-12

如图4-12所示，给定三根固定长度的竹签，所围出来的三角形，其三个角的大小是固定的。因此，如果两个三角形的三个边分别相等，则这两个三角形全等，即

边边边定理 (SSS)
三个边对应相等的两个三角形全等。

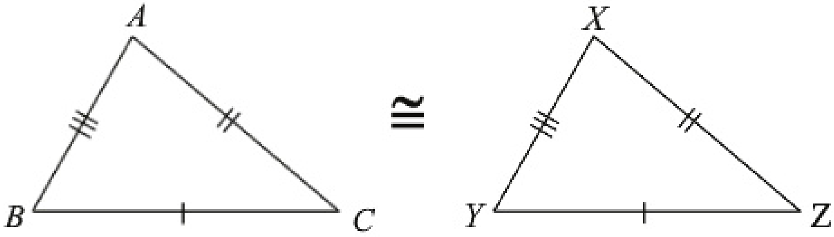


图 4-14

事实上，用直尺及圆规可作出已知三边长的三角形。

图4-15所示为一圆规。如图4-16(a)所示，将圆规的针固定在一点 O，并把圆规旋转 360°，所得的图形是一个圆 (图4-16(b))。圆上各点与 O 的距离是固定的，称为圆的半径。

补充资料

如果两个三角形的其中两个边分别相等，这两个三角形不一定全等，如图4-13所示的 ΔABC 与 ΔABD，AB 为公共边，$AC = AD$，但显然的，$BC \neq BD$，因此这两个三角形并不全等。

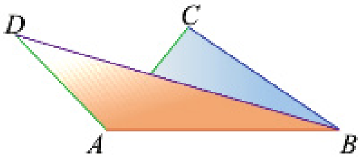


图 4-13



图 4-15

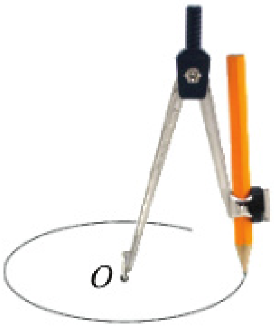


图4-16(a)

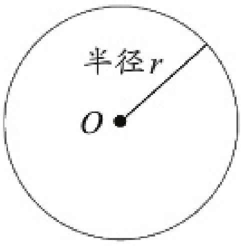
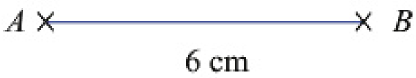


图4-16(b)

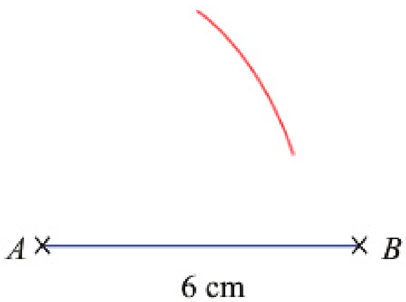
例题 2

已知 ΔABC 中， $AB = 6$ cm， $AC = 5$ cm， $BC = 4$ cm。用直尺及圆规作 ΔABC。

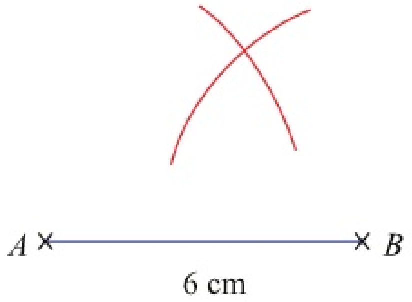
解： 第一步：用直尺作一长 6 cm 的线段，标示其端点为 A 及 B。



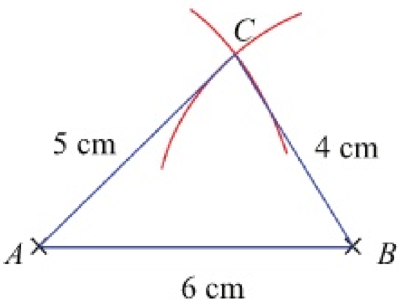
第二步：以 A 为圆心，用圆规作一半径为 5 cm的弧。



(续) 第三步：以 B 为圆心，用圆规作一半径为4 cm的弧。

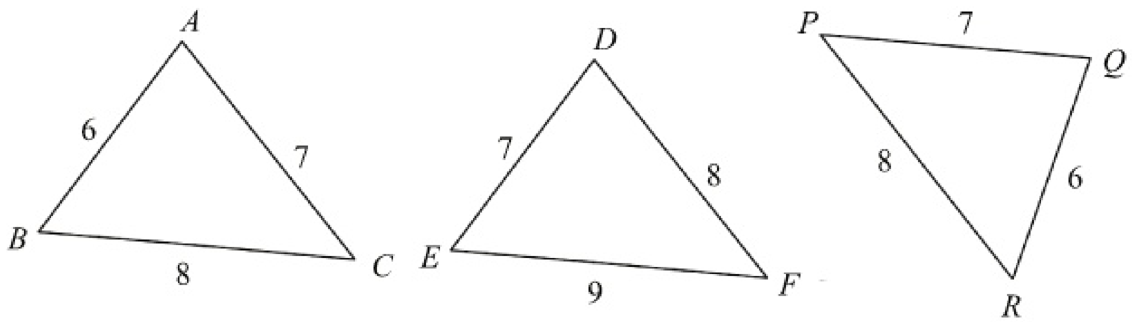


第四步：将两弧的交点标示为C，用直尺作出线段AC及BC，即得出ΔABC。



例题 3

下图中，按对应顶点的顺序写出全等三角形的名称，并说明原因。



解： ΔABC 三边的长为6，7，8

ΔDEF 三边的长为7，8，9

ΔPQR 三边的长为6，7，8

因此，只有 ΔABC 与 ΔPQR 全等。

$AB = QR = 6$

$AC = QP = 7$

$BC = RP = 8$

$\therefore\ \Delta ABC \cong \Delta QRP$ (SSS)

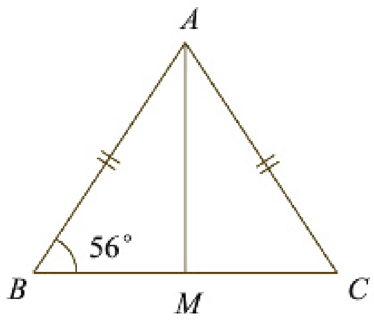
例题 4

如右图所示，ΔABC 是等腰三角形，$AB = AC$，AM是BC边上的中线，$\angle B = 56°$。

(a) 证明 $\Delta ABM \cong \Delta ACM$；

(b) 求 $\angle C$；

(c) 求 $\angle BAC$。



解： (a) $AB = AC$ (已知)

$BM = MC$ (AM是中线)

AM 是公共边

$\therefore\ \Delta ABM \cong \Delta ACM$ (SSS)

(b) $\therefore\ \angle C = \angle B$ (三角形全等，对应角相等)

$\therefore\ \angle C = 56°$

(c) $\angle BAC + \angle B + \angle C = 180°$

$\therefore\ \angle BAC = 180° - 56° - 56°$

$= 68°$

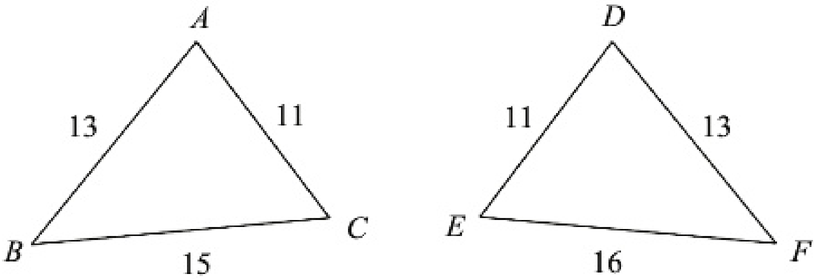
补充资料

由例题 4 可得，若 ΔABC 是等腰三角形，$AB = AC$，则 $\angle B = \angle C$。换句话说，若一个三角形的两个边相等，则这两个边所对应的角也相等。

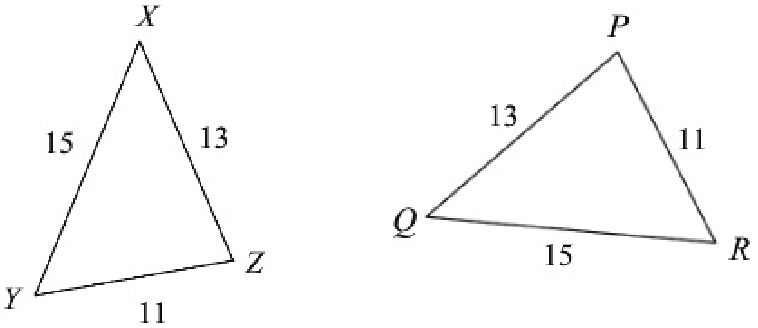
随堂练习 6

1. 用直尺及圆规作一边长为 4 cm，5 cm，7 cm 的三角形。
2. 判断下列各对三角形是否全等，并说明原因。

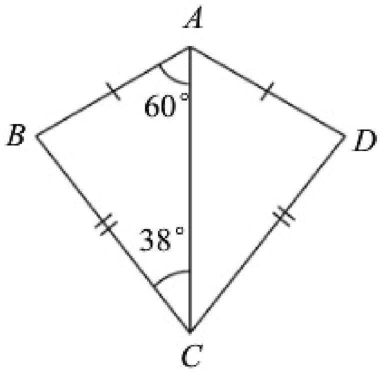
(a)



(b)



3. 右图中，$ABCD$是一四边形，$AB = AD$，$CB = CD$，$\angle BAC = 60°$，$\angle ACB = 38°$。



(a) 证明 $\Delta ABC \cong \Delta ADC$；

(b) 证明 $\angle ABC = \angle ADC$；

(c) 求 $\angle ADC$。

练习 4.3b

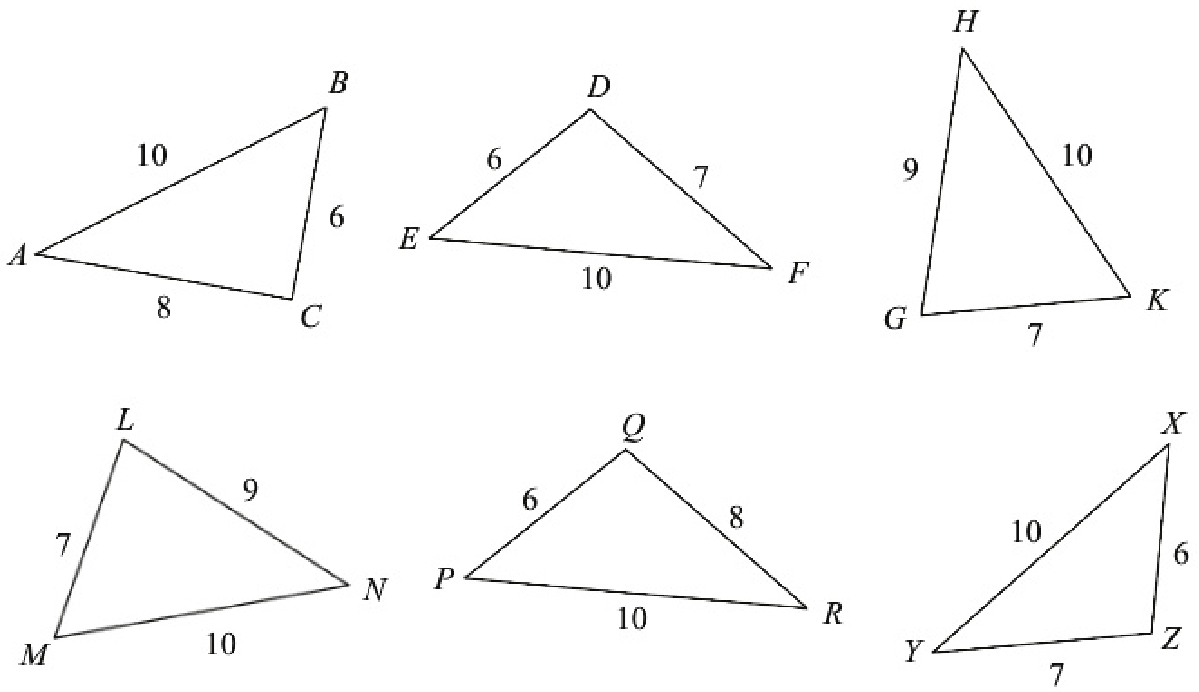
1. 用直尺及圆规作 ΔPQR：

   (a) $PQ = 4$ cm，$QR = 5$ cm，$PR = 3$ cm

   (b) $PQ = 5$ cm，$QR = 4$ cm，$PR = 2$ cm

   (c) $PQ = 5$ cm，$QR = 6$ cm，$PR = 5$ cm

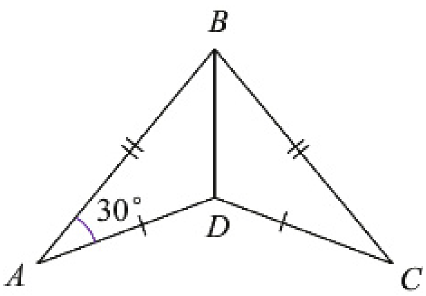
2. 下图中，按对应顶点的顺序写出各对全等三角形的名称，并说明原因。



3. 右图中，$BA = BC$，$DA = DC$，$\angle A = 30°$。

   (a) 证明 $\Delta ABD \cong \Delta CBD$；

   (b) 求 $\angle C$。



边角边定理 (SAS)

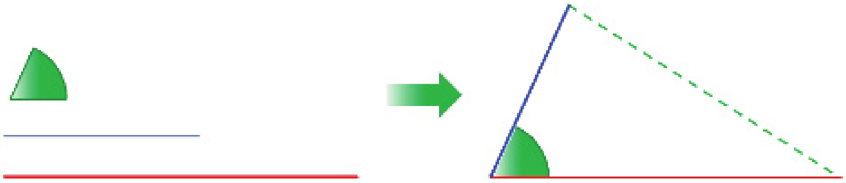


图4-17

如图4-17所示，有两根固定长度的竹签，以及一个固定的角度板，若要组成一个三角形，使得角度板夹在两根竹签之间，方法只有一种。因此，如果一个三角形的两个边及夹角与另一个三角形的两个边及夹角相等，则这两个三角形全等，即

> **边角边定理 (SAS)**
> 两个边及夹角对应相等的两个三角形全等。

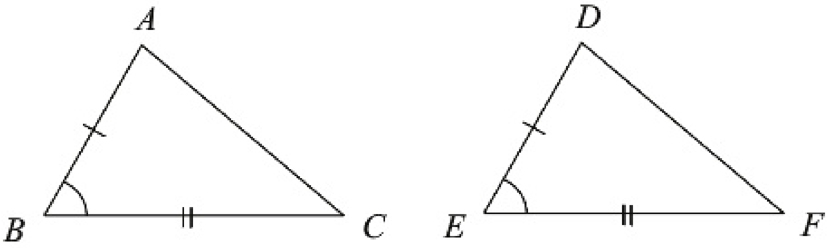


图4-18

事实上，用直尺、圆规及量角器可以作出已知两边及其夹角的三角形。

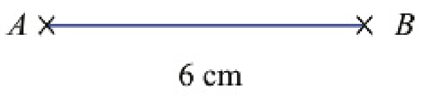
补充资料

SAS表示英文Side-Angle-Side，其中A必须写在两个S的中间以表示两个边的夹角。

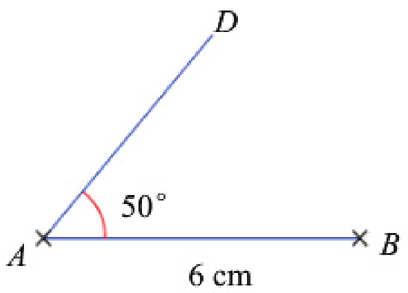
例题 5

已知 ΔABC 中，$AB = 6\text{ cm}$，$AC = 4\text{ cm}$，$\angle A = 50°$，用直尺、圆规及量角器作 ΔABC。

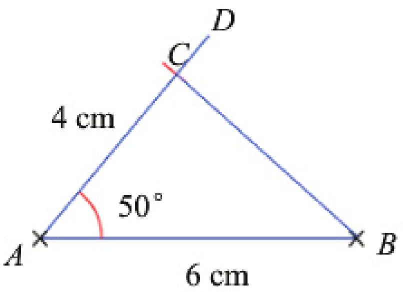
解： 第一步：用直尺作一长 6 cm 的线段，标示其端点为 A 及 B。



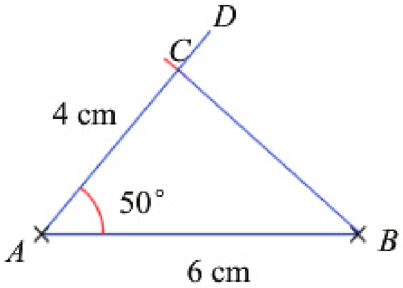
第二步：以 A 为顶点，用量角器作 $\angle DAB = 50°$。



第三步：用直尺在直线 AD 上求出一点，使得 $AC = 4\text{ cm}$。



(续) 第四步：利用直尺作出线段 BC，即得出 ΔABC。

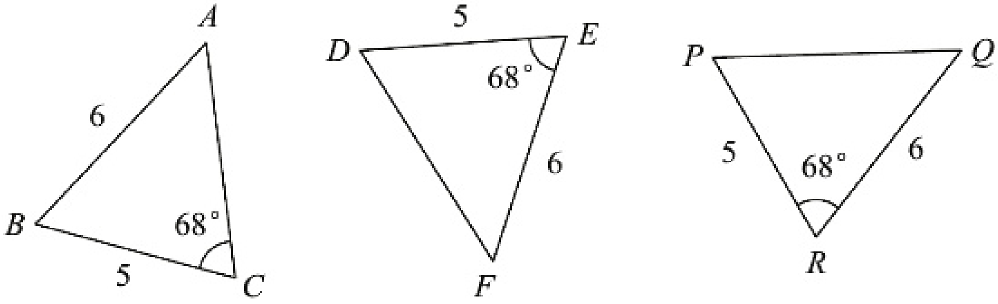


思考题

如果我们先作线段 AC，得出来的三角形会不会一样？

例题 6

下图中的三角形都是不等边三角形。试按对应顶点的顺序写出一对全等三角形的名称，并说明原因。



解： ΔABC 中，边长为5及6的边所夹的角不等于68°

ΔDEF 中，边长为5及6的边所夹的角等于68°

ΔPQR 中，边长为5及6的边所夹的角等于68°

因此，只有 ΔDEF 与 ΔPQR 全等

$ED = RP = 5$

$EF = RQ = 6$

$\angle DEF = \angle PRQ = 68°$

$\therefore\ \Delta DEF \cong \Delta PRQ \quad (\text{SAS})$

补充资料

不等边三角形的三个角也都不相等。

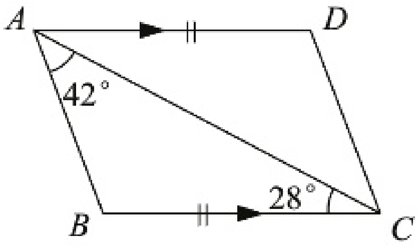
例题 7

如右图所示，四边形 $ABCD$ 中，AD 与 BC 平行且相等。

(a) 证明 $\Delta ABC \cong \Delta CDA$；

(b) 若 $\angle CAB = 42°$，$\angle ACB = 28°$，求 $\angle ADC$；

(c) 证明 $AB // DC$ 且 $AB = CD$。



解： (a) $BC = DA$ （已知）

$\angle ACB = \angle CAD$ （$BC // AD$，内错角相等）

AC 是公共边

$\therefore \quad \Delta ABC \cong \Delta CDA$ （SAS）

(b) $\therefore \quad \angle ADC = \angle CBA$ （三角形全等，对应角相等）

$\angle CBA + 42° + 28° = 180°$

$\therefore \quad \angle CBA = 180° - 42° - 28°$

$= 110°$

$\therefore \quad \angle ADC = 110°$

(c) $\angle BAC = \angle DCA$ （$\Delta ABC \cong \Delta CDA$，对应角相等）

$\therefore \quad AB // DC$ （内错角相等，两直线平行）

$AB = CD$ （$\Delta ABC \cong \Delta CDA$，对应边相等）

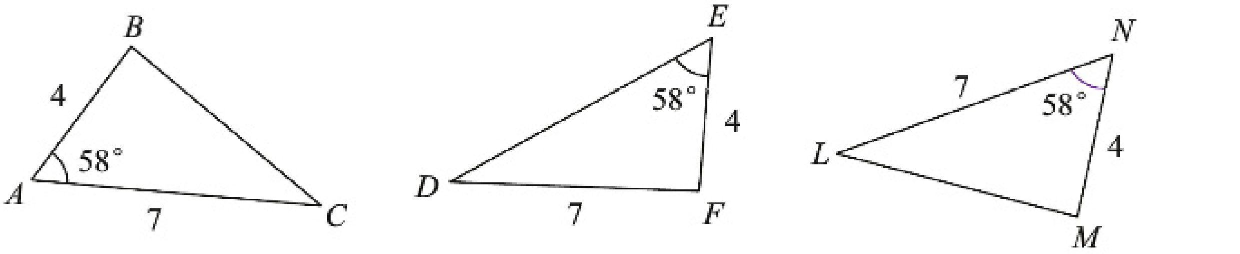
补充资料

由例题7的证明可得，若一个四边形的一组对边平行且相等，则另一组对边也平行且相等。

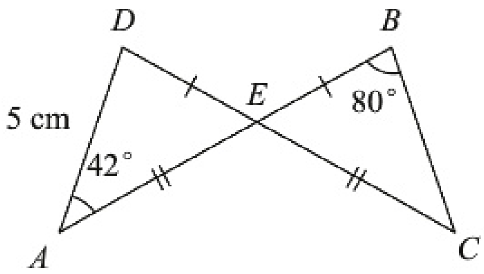
随堂练习 7

1. 已知 ΔABC 中，$AC = 4$ cm，$BC = 5$ cm，$\angle C = 74°$。用量角器、直尺及圆规作 ΔABC。

2. 下图中的三角形均为不等边三角形。试按对应顶点的顺序写出一对全等三角形的名称，并说明原因。



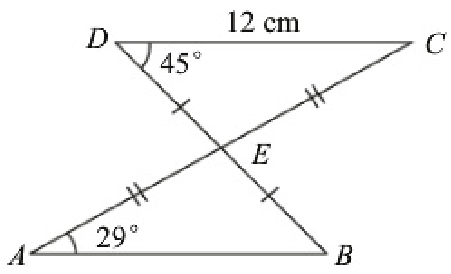
3. 右图中，直线 AB 与直线 CD 相交于点 E，$EA = EC$，$EB = ED$。
   (a) 证明 $\Delta EAD \cong \Delta ECB$；
   (b) 求 $\angle EDA$；
   (c) 求 BC；
   (d) 求 $\angle BEC$。



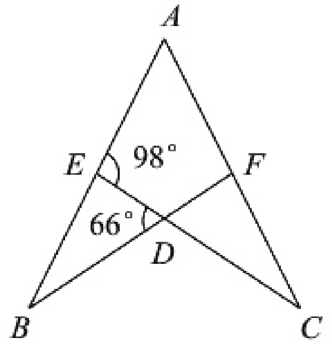
练习 4.3c

1. 用量角器、直尺及圆规作 ΔXYZ。
   (a) $XY = 6$ cm，$XY = 4$ cm，$\angle X = 60°$
   (b) $YZ = 7$ cm，$XZ = 4$ cm，$\angle Z = 90°$
   (c) $XY = 6$ cm，$YZ = 5$ cm，$\angle Y = 115°$

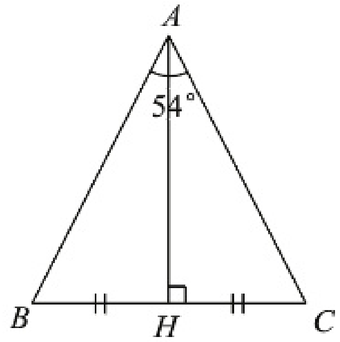
2. 右图中，直线 AC 与 BD 相交于点 E，$EA = EC$，$EB = ED$。
   (a) 证明 $\Delta EAB \cong \Delta ECD$；
   (b) 求 $\angle B$，$\angle C$ 及 $\angle DEC$；
   (c) 求 AB 的长；
   (d) 证明 $AB // CD$。



3. 右图中，$AB=AC$，E、F分别是AB及AC的中点。
   (a) 求$\angle B$；
   (b) 证明$\Delta ABF \cong \Delta ACE$；
   (c) 求$\angle C$。



4. 在右图的ΔABC中，AH是BC边上的中垂线，$\angle BAC=54°$。
   (a) 证明$\Delta AHB \cong \Delta AHC$；
   (b) 求$\angle B$及$\angle C$；
   (c) 证明AH是$\angle BAC$的平分线。



角边角定理 (ASA) 及角角边定理 (AAS)

如图4-19所示，由一个固定长度的竹签及两个固定的角度板，若要组成一个三角形，使得两个角度板分别在竹签的两端，方法只有一种。因此，若一个三角形的两个角及夹边与另一个三角形的两个角及夹边相等，则这两个三角形全等，即

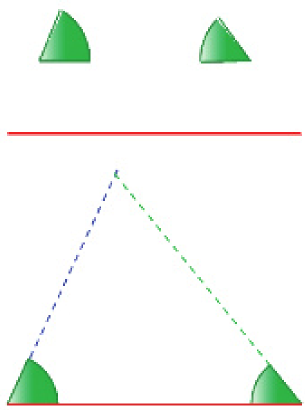


图4-19

角边角定理 (ASA)
两个角及夹边对应相等的两个三角形全等。

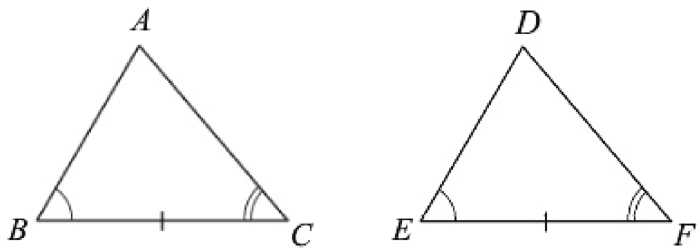


图4-20

由于三角形的内角和为180°，因此若一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角分别相等，则这两个三角形的第三个角也一定相等。因此，若一个三角形的两个角及其中一角的对边与另一个三角形的两个角及其中一角的对边相等，则这两个三角形全等，即

> **角角边定理(AAS)**
> 两个角及其中一角的对边对应相等的两个三角形全等。

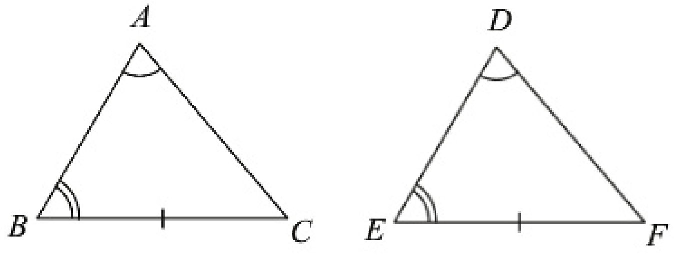


图4-21

补充资料

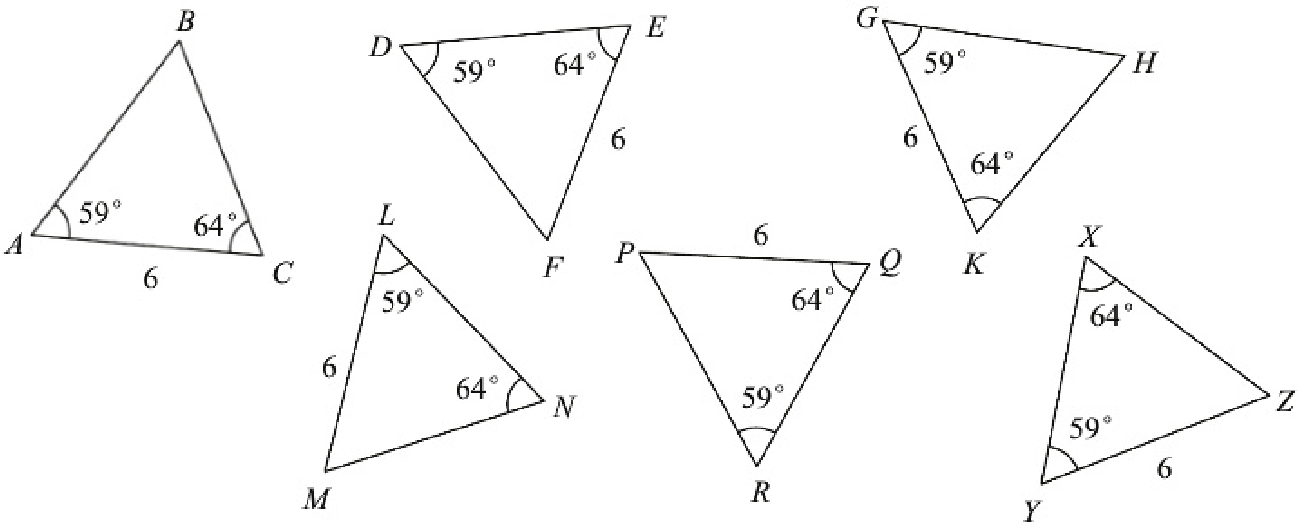
我们也可以用SAA来表示AAS。

思考题

在角角边定理中，为什么要强调两个角及其中一角的对边对应相等？若两个三角形的两个角及一个非夹边相等，它们一定全等吗？

例题 8

下图中的三角形都是不等边三角形。试按对应顶点的顺序写出全等三角形的名称，并说明原因。



解： 图中的每个三角形的其中两个角都是59°及64°。

ΔABC 及 ΔGHK 中，边长为6的边都是角度为59°及64°的角的夹边，因此它们全等。

$\angle A = \angle G = 59°$

$\angle C = \angle K = 64°$

$AC = GK = 6$

$\therefore \quad \Delta ABC \cong \Delta GHK \quad \text{(ASA)}$

ΔDEF 及 ΔPQR 中，边长为6的边都是角度为59°的角的对边，因此它们全等。

$\angle D = \angle R = 59°$

$\angle E = \angle Q = 64°$

$EF = QP = 6$

$\therefore \quad \Delta DEF \cong \Delta RQP \quad \text{(AAS)}$

ΔLMN 及 ΔXYZ 中，边长为6的边都是角度为64°的角的对边，因此它们全等。

$\angle L = \angle Y = 59°$

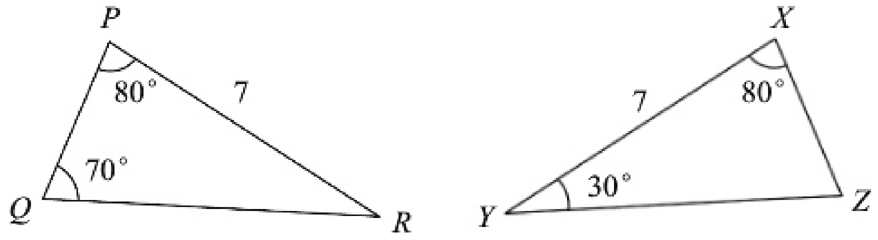
$\angle N = \angle X = 64°$

$LM = YZ = 6$

$\therefore \quad \Delta LNM \cong \Delta YXZ \quad \text{(AAS)}$

例题 9

判断下列两个三角形是否全等，并说明原因。



解： ΔPQR 中，$\angle R+70°+80°=180°$

$\therefore \quad \angle R=30°$

$\angle P=\angle X=80°$

$\angle R=\angle Y=30°$

$PR=XY=7$

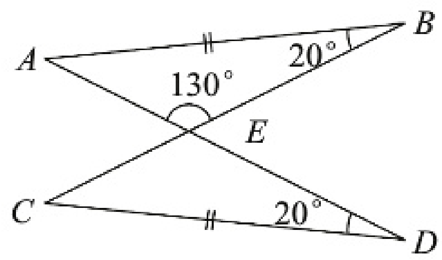
$\therefore \ \Delta PQR\cong\Delta XZY \quad$ (ASA)

例题 10

如右图所示，直线AD与BC相交于点E，$AB=CD$，$\angle B=\angle D=20°$，$\angle AEB=130°$，

(a) 证明$\Delta ABE\cong\Delta CDE$；

(b) 求$\angle C$。



解： (a) $AB=CD$ (已知)

$\angle B=\angle D=20°$ (已知)

$\angle AEB=\angle CED$ (对顶角相等)

$\therefore \ \Delta ABE\cong\Delta CDE \quad$ (AAS)

(b) $\angle A=\angle C$ (三角形全等，对应角相等)

$\angle A+20°+130°=180°$

$\therefore \angle A=30°$

$\therefore \angle C=30°$

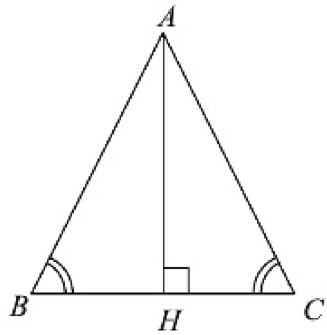
例题 11

如右图所示，ΔABC 中，$\angle B=\angle C$，AH 是 BC 边上的高。

(a) 证明 $\Delta ABH \cong \Delta ACH$；

(b) 证明 $AB=AC$；

(c) 若 $BC=8$ cm，求 BH 的长。



解： (a) $\angle B=\angle C$ (已知)

$\angle AHB=\angle AHC=90°$ (AH 是高)

AH 是公共边

$\therefore \Delta ABH \cong \Delta ACH$ (AAS)

(b) $\therefore AB=AC$ (三角形全等，对应边相等)

(c) $BH=CH$ (三角形全等，对应边相等)

$BH+CH=BC$

$BH+BH=8$

$\therefore BH=4$ cm

补充资料

由例题11可知，若一个三角形的两个角相等，则这两个角所对的边也相等。

由例题4及例题11的证明，我们得到以下的结论：

> 在一个三角形中，等边对等角，等角对等边。

补充资料

这里我们来证明4.1节中所提到的“大边对大角”及“大角对大边”。

- 大边对大角

ΔABC 中，若 $AB > AC$，我们要证明 $\angle ACB > \angle ABC$。

如图4-22所示，在较长的边 AB 上取一点 D，使得 $AD = AC$，并连接 CD。

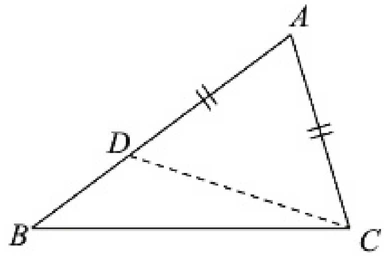


图4-22

ΔACD 中，

∵ $AC = AD$

∴ $\angle ACD = \angle ADC$ (等边对等角)

∴ $\angle ACB > \angle ADC$

$\angle ADC = \angle ABC + \angle DCB$ (外角＝内对角之和)

∴ $\angle ADC > \angle ABC$

∴ $\angle ACB > \angle ABC$

- 大角对大边

ΔABC 中，若 $\angle ACB > \angle ABC$，我们要证明 $AB > AC$。

如图4-23所示，在较大的角 $\angle ACB$ 内作线段 CE 交线段 AB 于点 E，使得 $\angle ECB = \angle ABC$。

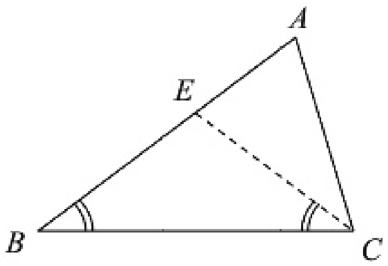


图4-23

ΔABC 中，

∵ $\angle EBC = \angle ECB$

∴ $EB = EC$ (等角对等边)

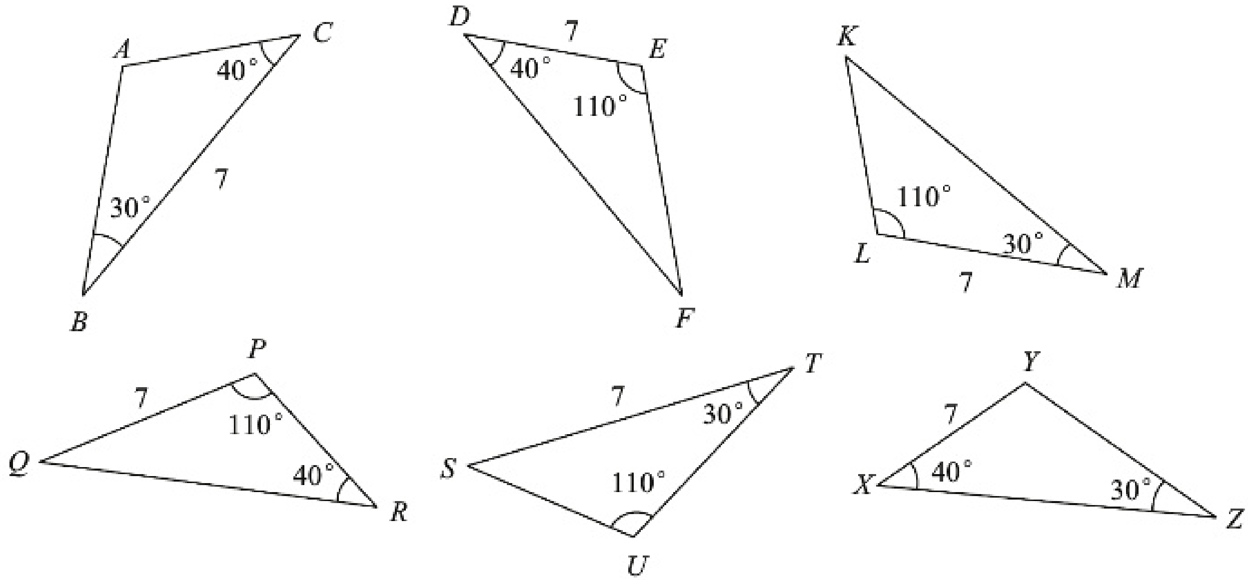
ΔAEC 中，$AE + EC > AC$ (三角形两边的和大于第三边)

∴ $AE + EB > AC$

∴ $AB > AC$

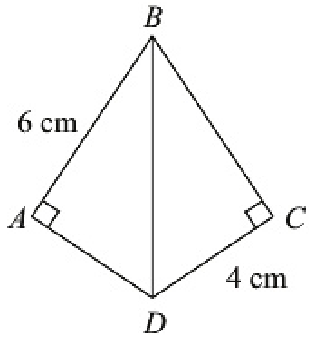
随堂练习 8

1. 已知ΔABC中，$AB=6\text{ cm}$，$\angle A=55°$，$\angle B=40°$。用直尺，圆规及量角器作ΔABC。
2. 下图中的三角形都是不等边三角形。试按对应顶点的顺序写出全等三角形的名称，并说明原因。

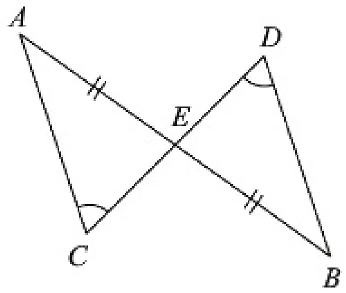


练习 4.3d

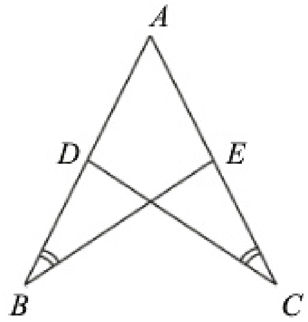
1. 用量角器、直尺及圆规作ΔPQR。
   (a) $PR=6\text{ cm}$，$\angle P=36°$，$\angle R=90°$
   (b) $QR=8\text{ cm}$，$\angle P=128°$，$\angle R=28°$
   (c) $PQ=7\text{ cm}$，$\angle Q=49°$，$\angle R=39°$
2. 如右图所示，$\angle ABD=\angle CBD$，$\angle A$及$\angle C$是直角。
   (a) 证明$\Delta ABD\cong\Delta CBD$；
   (b) 求AD及BC的长。



3. 右图中，直线 AB 及 CD 相交于点 E。若点 E 是线段 AB 的中点，$\angle C = \angle D$，
   (a) 证明 $\Delta AEC \cong \Delta BED$；
   (b) 证明点 E 也是线段 CD 的中点。



4. 右图中，已知 $\angle B = \angle C$，$AB = AC$，
   (a) 证明 $\Delta ACD \cong \Delta ABE$；
   (b) 证明 $BE = CD$。



根据定义，两个三角形全等，则三个对应边必须分别相等，三个对应角也必须分别相等。由上面的讨论，我们知道，一般上只要这六个条件中的三个成立，则两个三角形全等。

更具体一点，我们已经讨论了边边边，边角边，角边角及角角边的情况。我们发现，两个三角形只要满足这些情况，则它们全等。但是，还有两种情况我们还没有考虑：

- 若两个三角形的三个角相等 (角角角)，这两个三角形是否一定全等呢？
- 若两个三角形的两个边及其中一边的对应角相等 (边边角)，这两个三角形是否一定全等呢？

让我们先来探讨角角角的情况。如图4-24所示，在 ΔABC 中作直线 DE 平行于直线 BC，则同位角 $\angle ADE$ 与 $\angle ABC$ 相等，同位角 $\angle AED$ 与 $\angle ACB$ 相等。因此，ΔABC 与 ΔADE 的三个角分别相等，但很明显的，这两个三角形并不全等。

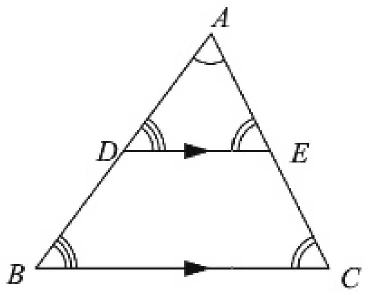


图 4-24

我们得到以下的结论：若两个三角形的三个角相等，两个三角形不一定全等。

再来探讨边边角的情况。如图4-25所示，有两根固定长度的竹签，以及一个固定的角度板，若角度板的对边必须是蓝色的竹签，是否只有唯一一种方法可以组成三角形呢？答案是否定的，如图4-26所示的两个三角形都是由图4-25所示的竹签及角度板所组成，其中角度板的对边是蓝色的竹签。

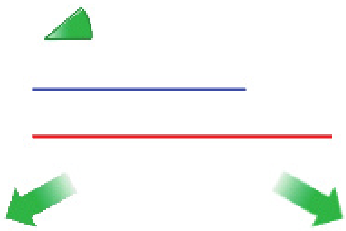


图4-25



图4-26

我们可依下列步骤作ΔABC，使得$AB=7\text{ cm}$，$AC=5\text{ cm}$，$\angle B=40^\circ$。

第一步：先用直尺画一射线BD，表示其一端点为B。

第二步：以B为顶点，用量角器作$\angle EBD=40^\circ$。

第三步：用直尺在射线BE上作出一点A，使得$AB=7\text{ cm}$。

第四步：以A为圆心，作一半径为5 cm的弧，则我们发现，此弧交射线BD于两点C_1及C_2，如图4-27所示。

第五步：用直尺连线段AC_1及线段AC_2，便得出满足条件的两个三角形ΔABC_1及ΔABC_2。

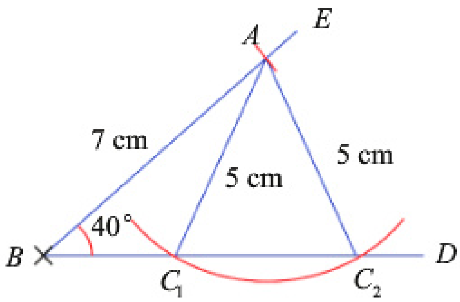


图4-27

因此，我们得到以下的结论：若两个三角形的两个边及其中一个边的对角相等，两个三角形不一定全等。

斜边、直角边定理 (RHS)

如上所述，若两个三角形的两个边及其中一个边的对角相等，两个三角形不一定全等。但是若这两个三角形都是直角三角形，则情况就不一样。

一个直角三角形中，直角所对的边称为斜边，直角的两边称为直角边。如图4-28所示，ΔABC 是直角三角形，$\angle A$ 是直角，BC是斜边，AB及AC是直角边。

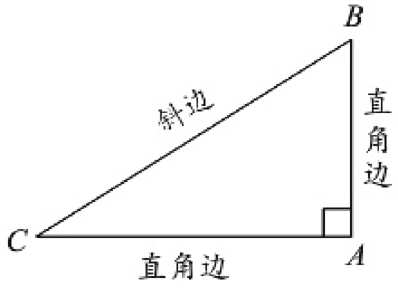


图4-28

对于直角三角形，SSA是成立的。更具体一点：

斜边、直角边定理 (RHS)
斜边与一直角边对应相等的两个直角三角形全等。

思考题

若两个直角三角形的两对直角边对应相等，这两个三角形全等吗？

现在我们来证明这一定理。如图4-29所示，ΔABC 与 ΔDEF 是直角三角形，其中 $\angle A$ 及 $\angle D$ 是直角，直角边 $AB=DE$，斜边 $BC=EF$，我们要证明 $\Delta ABC \cong \Delta DEF$。

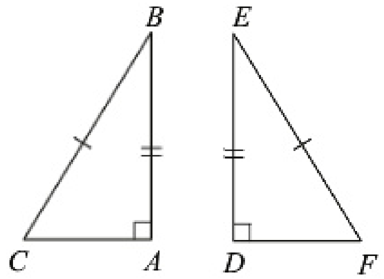


图4-29

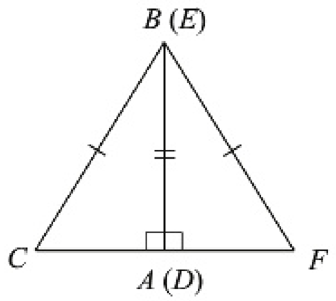


图4-30

如图4-30所示，将ΔABC 与 ΔDEF 沿着相等的直角边 AB 与 DE 拼在一起，使得AB与DE重合，则

$$\angle BAC + \angle BAF = 90° + 90° = 180°$$

因此，CAF 是直线。

ΔBCF 中，$\because$ $BC=BF$

$\therefore$ $\angle C = \angle F$

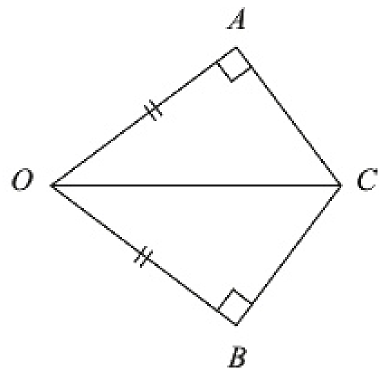
现在我们有了与例题 11 一样的条件。由例题 11 的证明可得，$\Delta ABC \cong \Delta ABF$，即 $\Delta ABC \cong \Delta DEF$。

例题 12

如右图所示，$OA=OB$，$\angle A=\angle B=90°$。

(a) 证明 $\Delta OAC \cong \Delta OBC$；

(b) 证明 $\angle AOC=\angle BOC$。



解： (a) $\angle A=\angle B=90°$ (已知)

$OA=OB$ (已知)

OC是公共斜边

$\therefore\ \Delta OAC \cong \Delta OBC$ (RHS)

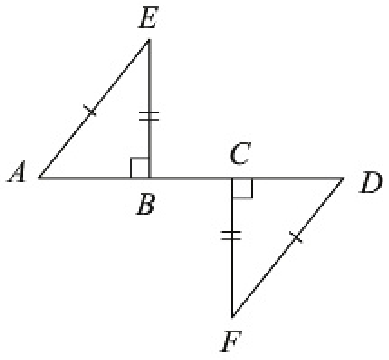
(b) $\therefore\ \angle AOC=\angle BOC$ (三角形全等，对应角相等)

现在我们来总结这一节所学的知识。如果要证明两个三角形全等，先列出或推导出至少三组相等的边或角，如果这些条件满足SSS，SAS，ASA，AAS或RHS，则这两个三角形全等，否则无法下结论。在AAS的情况下，必须注意相等的边所对的角必须相等。

随堂练习 9

1. 已知ΔXYZ中，$XZ=6$ cm，$YZ=8$ cm，$\angle Y=34°$。用量角器，直尺及圆规作满足这些条件的两个不全等的三角形。
2. 已知ΔPQR中，$\angle R=90°$，$PQ=8$ cm，$QR=5$ cm。用量角器，直尺及圆规作ΔPQR。

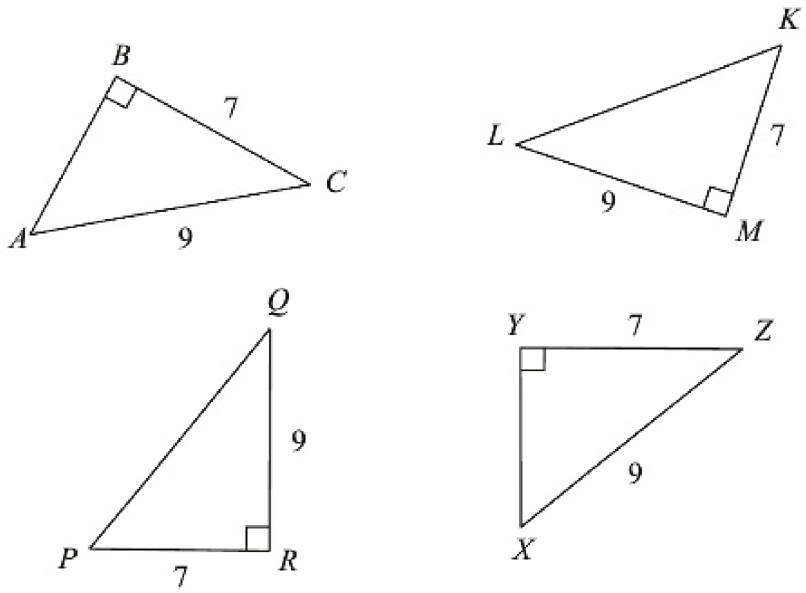
3. 右图中，EB与FC垂直于直线AD，垂足为B及C。已知$EB = FC$，$AE = DF$，
   (a) 证明$\Delta ABE \cong \Delta DCF$；
   (b) 证明$AB = CD$；
   (c) 证明$AE \parallel DF$。



练习 4.3e

1. 用量角器、直尺及圆规作ΔABC。
   (a) $\angle A = 90°$，$AB = 5$ cm，$BC = 10$ cm
   (b) $\angle B = 90°$，$AB = 6$ cm，$BC = 8$ cm
   (c) $\angle A = 63°$，$AB = 6$ cm，$BC = 7$ cm

2. 下图中，按对应顶点的顺序写出各对全等三角形的名称，并说明原因。

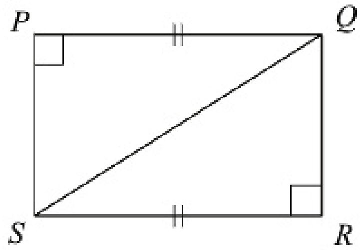


3. 如右图所示，四边形 $PQRS$ 中，$\angle P$ 及 $\angle R$ 为直角，$PQ = SR$。

   (a) 证明 $\Delta PQS \cong \Delta RSQ$；

   (b) 证明 $PS = QR$；

   (c) 证明 $PQ \parallel SR$。



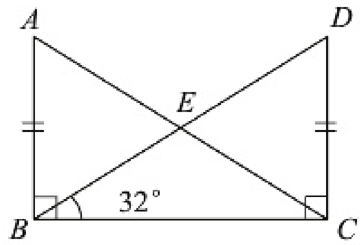
4. 右图中，AB 与 CD 皆垂直于 BC，且 $AB = CD$。

   (a) 证明 $\Delta ABC \cong \Delta DCB$；

   (b) 已知 $\angle DBC = 32°$，求 $\angle ACB$；

   (c) 证明 $\angle ABE = \angle DCE$；

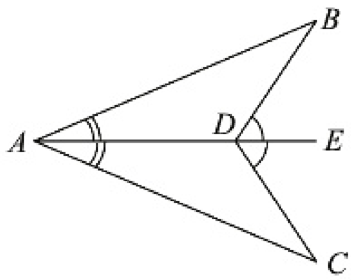
   (d) 证明 $AE = ED$。



5. 右图中，$\angle BAE = \angle CAE$，$\angle BDE = \angle CDE$。

   (a) 证明 $\Delta ABD \cong \Delta ACD$；

   (b) 证明 $AB = AC$。



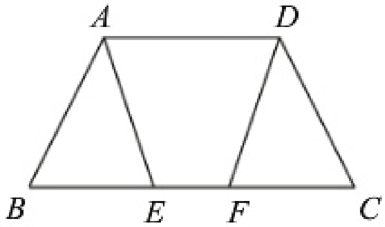
6. 右图中，$BEFC$ 是直线，$AB = DC$，$BF = EC$，$\angle B = \angle C$。

   (a) 证明 $BE = FC$；

   (b) 证明 $\Delta ABE \cong \Delta DCF$；

   (c) 证明 $AE = DF$；

   (d) 若 $\angle ADC = 118°$，$\angle BAE = 45°$，求 $\angle ADF$。



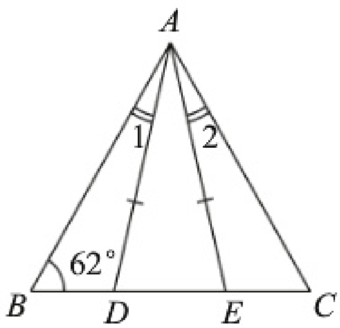
7. 右图中，$BDEC$ 是直线，$AD = AE$，$\angle 1 = \angle 2$。

   (a) 证明 $\angle ADB = \angle AEC$；

   (b) 证明 $\Delta ADB \cong \Delta AEC$；

   (c) 已知 $\angle B = 62°$，求 $\angle BAC$；

   (d) 证明 $BE = CD$。



4.4 等腰三角形及等边三角形

等腰三角形

在4.1节中，我们已经定义了等腰三角形是有两个边相等的三角形。

如图4-31所示，ΔABC 为等腰三角形，其中 $AB=AC$。这两个相等的边称为腰，另外一边 BC 称为底边，两腰的夹角 $\angle A$ 称为顶角，两腰的对角 $\angle B$ 与 $\angle C$ 称为底角。

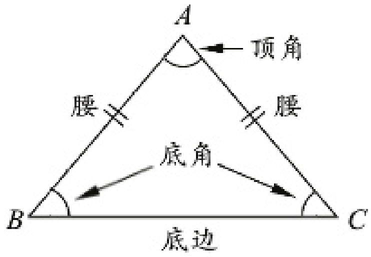


图4-31

仿造4.3节中例题4的证明，若 ΔABC 为等腰三角形，$AB=AC$，如图4-32所示，作 BC 边上的中线 AM，则由SSS可得，ΔABM 与 ΔACM 全等。因此，

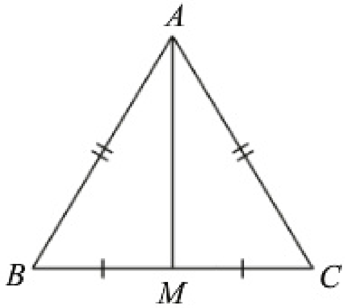


图4-32

1. $\angle B=\angle C$
2. $\angle AMB=\angle AMC$
3. $\angle BAM=\angle CAM$

由 $\angle AMB=\angle AMC$ 且 $\angle AMB+\angle AMC=180°$ 可得，$\angle AMB=\angle AMC=90°$，即 $AM\perp BC$。$\angle BAM=\angle CAM$ 表示 AM 是 $\angle A$ 的平分线。

综合以上所述，等腰三角形有以下的性质：

等腰三角形的底角相等。

等腰三角形的顶角平分线，底边上的高及底边上的中线互相重合。

等腰三角形的顶角平分线垂直且平分底边。

在4.3节的例题11中，我们也证明了若一个三角形的两个角相等，则这两个角所对的边也相等，即

有两个角相等的三角形是等腰三角形。

除了直接证明三角形的两个边相等外，这是另外一个判定等腰三角形的方法。

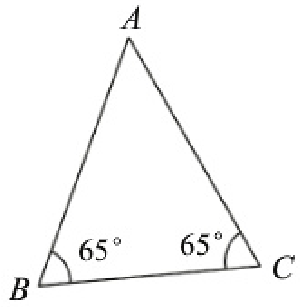
思考题

等腰三角形是否为线对称图形？若是，它的对称轴在哪里？

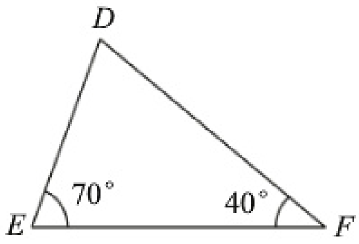
例题 1

判定下列各三角形是否为等腰三角形，并说明原因。

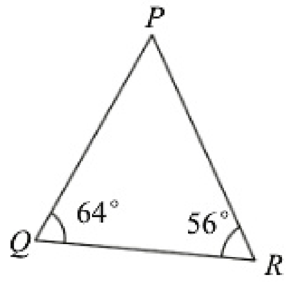
(a)



(b)



(c)



解： (a) $\because \quad \angle B = \angle C = 65°$

$\therefore \quad \Delta ABC$ 是等腰三角形。

(b) $\angle D + 70° + 40° = 180°$

$\therefore \quad \angle D = 70°$

$\therefore \quad \angle D = \angle E$

$\therefore \quad \Delta DEF$ 是等腰三角形。

(c) $\angle P + 64° + 56° = 180°$

$\therefore \quad \angle P = 60°$

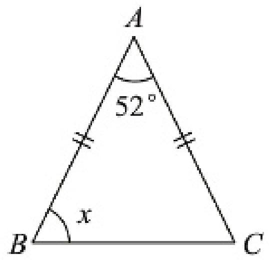
ΔPQR 的三个角都不相等

$\therefore \quad \Delta PQR$ 不是等腰三角形。

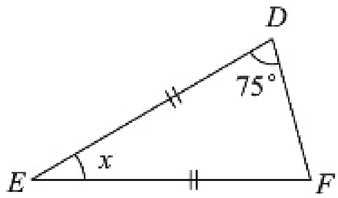
例题 2

下列各图中，求x：

(a)



(b)



解： (a) $\angle C=\angle B=x$ （等腰三角形的底角相等）

$52°+x+x=180°$

$2x=128°$

$\therefore \quad x=64°$

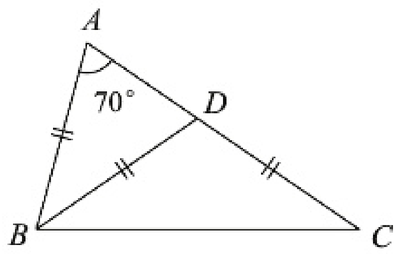
(b) $\angle F=\angle D=75°$ （等腰三角形的底角相等）

$x+75°+75°=180°$

$\therefore \quad x=30°$

例题 3

如右图所示，$AB=BD=DC$，$\angle A=70°$，求$\angle ABD$，$\angle BDC$及$\angle C$。



解： $\angle BDA=\angle A=70°$ （$BA=BD$，等边对等角）

$\angle ABD+70°+70°=180°$

$\angle ABD=40°$

$\angle BDC=\angle ABD+\angle A$ （外角＝内对角之和）

$=40°+70°$

$=110°$

(续) $\angle DBC = \angle C$ ($DB = DC$，等边对等角)

$110° + \angle DBC + \angle C = 180°$

$\angle C + \angle C = 70°$

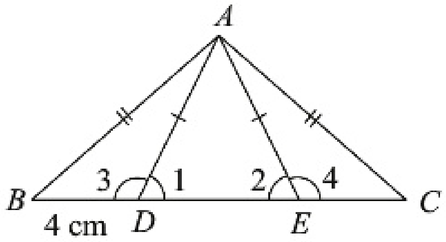
$\angle C = 35°$

例题 4

如右图所示，$AB = AC$，$AD = AE$。

(a) 证明 $\Delta ABD \cong \Delta ACE$；

(b) 若 $BD = 4$ cm，求 CE 的长。



解： (a) $\angle 1 = \angle 2$ ($AD = AE$，等边对等角)

$\angle 1 + \angle 3 = 180°$

$\angle 2 + \angle 4 = 180°$

$\therefore \angle 3 = \angle 4$

$AB = AC$ (已知)

$\angle B = \angle C$ ($AB = AC$，等边对等角)

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACE$ (AAS)

(b) $\therefore CE = BD$ (三角形全等，对应边相等)

$= 4$ cm



思考题

例题4中，为什么不能用

$AB = AC$，

$AD = AE$，

$\angle B = \angle C$

来证明 $\Delta ABD \cong \Delta ACE$？

等边三角形

在4.1节中，我们已经定义了等边三角形是三个边都相等的三角形，它是等腰三角形的特例。

如图4-33所示，ΔABC 是等边三角形。由于等边对等角，ΔABC 的三个角都相等，即

$$\angle A=\angle B=\angle C$$

又，三角形的内角和为180°，即

$$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$$

因此，

$$\angle A=\angle B=\angle C=\frac{180^\circ}{3}=60^\circ$$

即

> 等边三角形的每个内角都等于60°。

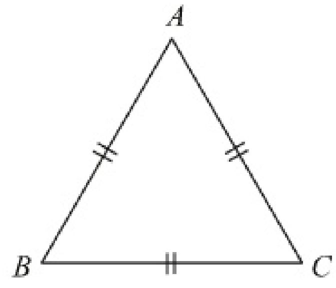


图4-33

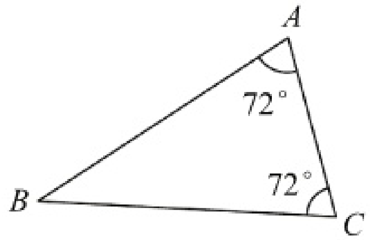
思考题

等边三角形是否为线对称图形？若是，它的对称轴在哪里？

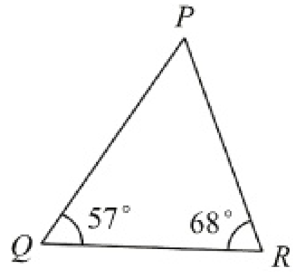
随堂练习 10

1\. 判定下列各三角形是否为等腰三角形，并说明原因。

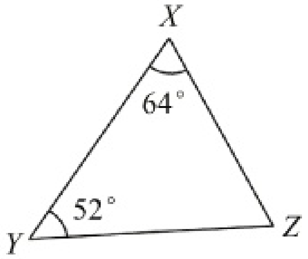
(a)



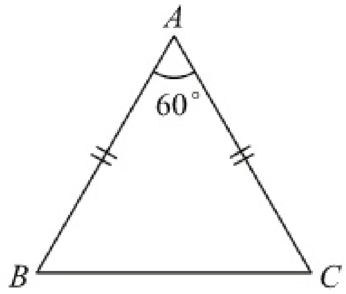
(b)



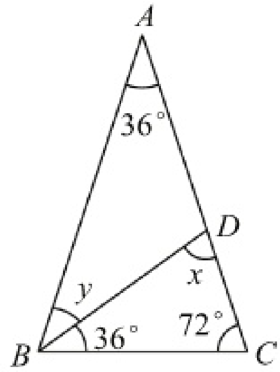
(c)



2. 如右图所示，ΔABC 是等腰三角形，$AB = AC$，其顶角 $\angle A$ 等于 $60°$。证明 ΔABC 是等边三角形。



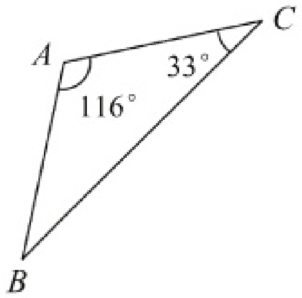
3. 右图中，$\angle A = \angle DBC = 36°$，$\angle C = 72°$。
   (a) 求 x 及 y；
   (b) 列出图中所有的等腰三角形，并说明原因。



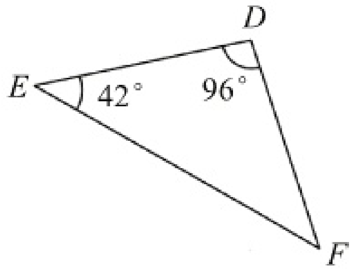
练习 4.4

1. 判定下列各三角形是否为等腰三角形，并说明原因。

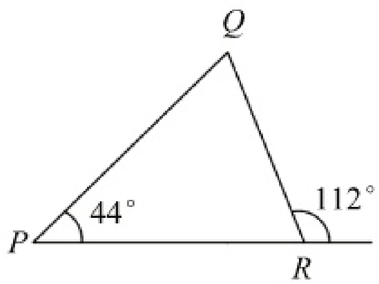
(a)



(b)

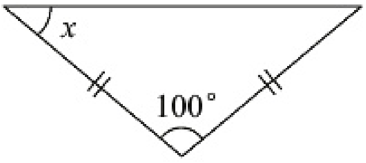


(c)

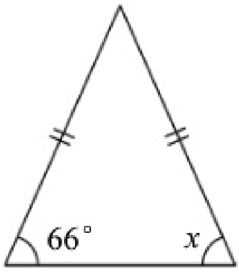


2. 下列各图中，求 x：

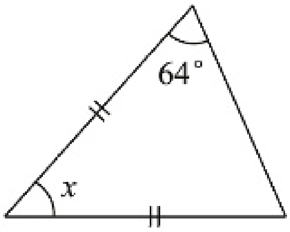
(a)



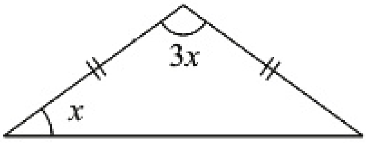
(b)



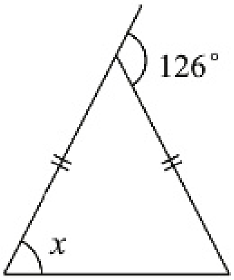
(c)



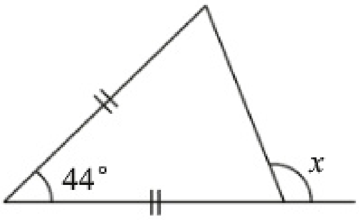
(d)



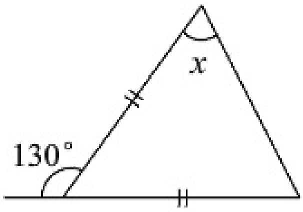
(e)



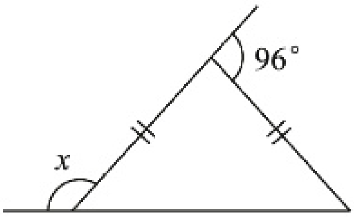
(f)



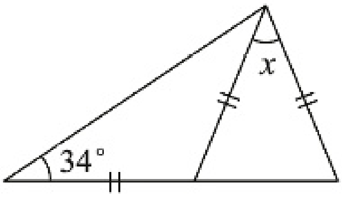
(g)



(h)



(i)



3. 已知 ΔABC 是等腰三角形， $AB=BC$，

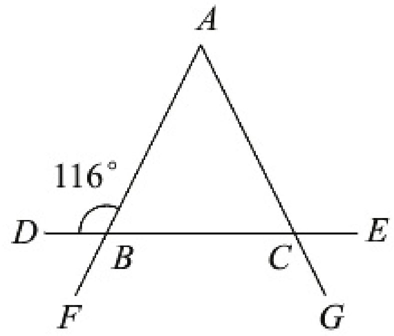
(a) 若 $\angle A=70°$，求 $\angle B$。

(b) 若 $\angle B=2\angle C$，求 $\angle A$ 及 $\angle B$。

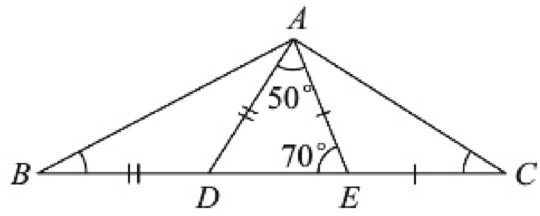
(c) 若 $\angle A$ 的外角等于 $110°$，求 $\angle B$。

(d) 若 $\angle C$ 的外角等于 $\angle B$ 的 5 倍，求 $\angle A$ 及 $\angle B$。

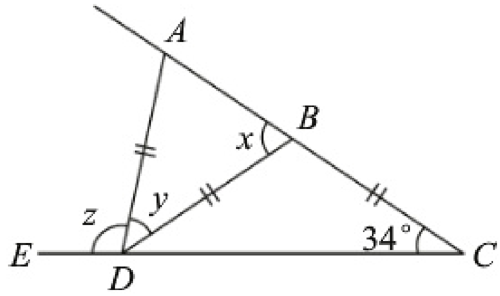
4. 右图中，ABF，ACG及$DBCE$是直线，ΔABC是等腰三角形，$AB=BC$，$\angle ABD=116°$，求$\angle ECG$。



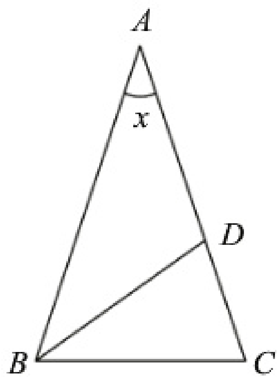
5. 如右图所示，$BDEC$是直线，$AD=BD$，$AE=EC$，$\angle DAE=50°$，$\angle AED=70°$。求$\angle C$，$\angle B$及$\angle BAC$。



6. 如右图所示，$AD=DB=BC$，$\angle C=34°$。求x、y及z。



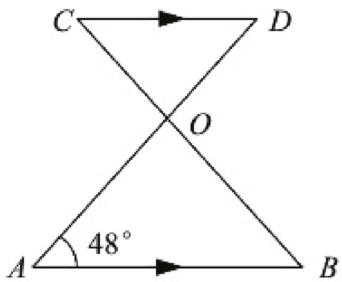
7. 右图中，$AB=AC$，$AD=DB=BC$。求x。



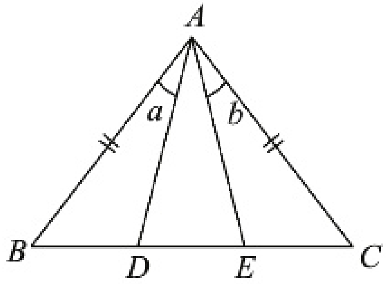
8. 右图中，直线AD与BC相交于点O。已知$AB // CD$，$OA=OB$。

(a) 求$\angle C$；

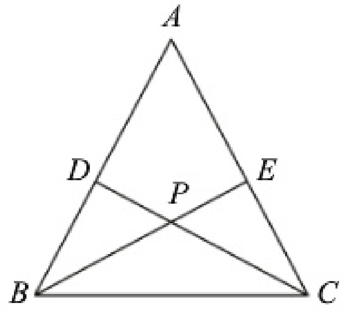
(b) 证明$OC=OD$。



9. 右图中，ΔABC 是等腰三角形，$AB = AC$，点 D 及点 E 在线段 BC 上，$\angle a = \angle b$。
   (a) 证明 $\Delta ABD \cong \Delta ACE$；
   (b) 证明 ΔADE 也是等腰三角形。



10. 右图中，ΔABC 是等腰三角形，$AB = AC$，$\angle A = 56°$，BE 及 CD 分别是 $\angle ABC$ 及 $\angle ACB$ 的平分线，BE 与 CD 相交于点 P。
   (a) 求 $\angle ABC$；
   (b) 求 $\angle PCB$；
   (c) 证明 ΔPBC 是等腰三角形。



4.5 直角三角形

在4.1节中，我们已经定义了直角三角形为有一个角是直角的三角形。

如图4-34所示，ΔABC 是一个直角三角形，$\angle A$ 是直角。AB 及 AC 是直角边，BC 是斜边。

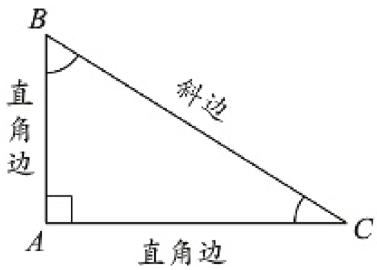


图4-34

由于三角形的内角和是180°，即

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

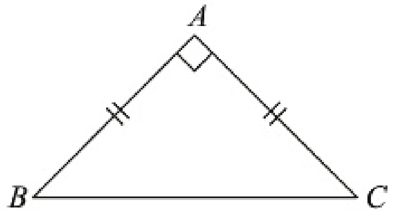
因此，由 $\angle A = 90°$ 可得 $\angle B + \angle C = 90°$

即

直角三角形的两个锐角互为余角。

例题 1

如右图所示，ΔABC 是等腰直角三角形，$\angle A = 90°$，$AB = AC$。求 $\angle B$ 及 $\angle C$。



解： $\angle B + \angle C = 90°$

$\angle B = \angle C$　　（$AB = AC$，等边对等角）

$\therefore\ \angle B = \angle C = \dfrac{90°}{2}$

$= 45°$

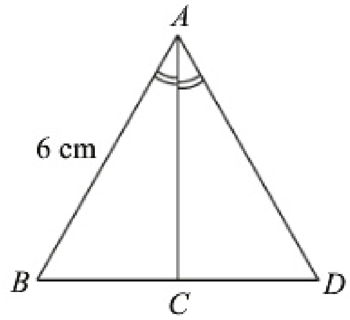
例题 2

右图中，ΔABD 是一个等边三角形，AC 是 $\angle BAD$ 的平分线。

(a) 求 $\angle BAC$；

(b) 证明 ΔABC 是直角三角形；

(c) 求 BC 的长。



解： (a) $\angle BAD = 60°$　（等边三角形的内角）

$\therefore\ \angle BAC = \dfrac{60°}{2}$　（AC 是 $\angle BAD$ 的平分线）

$= 30°$

(b) $\because$ 等腰三角形顶角的平分线垂直底边

$\therefore\ AC \perp BD$

即 $\angle ACB = 90°$

$\therefore\ \Delta ABC$ 是直角三角形。

(c) $BD = AB$ (等边三角形三边相等)

$= 6 \text{ cm}$

∵ 等腰三角形顶角的平分线平分底边

∴ $BC = \frac{1}{2} BD$

$= 3 \text{ cm}$

如图4-35所示，ΔABC 是直角三角形，$\angle C$ 是直角，$\angle A = 30°$，则由例题 2 可得，

$$BC = \frac{1}{2} AB$$

即

若直角三角形的一个锐角等于30°，则此锐角所对的直角边等于斜边的一半。

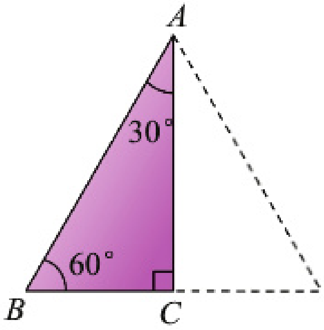


图4-35

相反的，我们也可以推论出

若直角三角形的一个直角边等于斜边的一半，则此直角边所对的锐角等于30°。

思考题

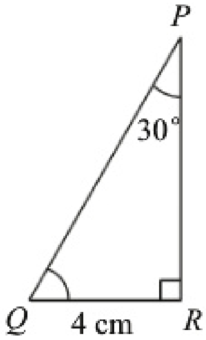
证明这个定理。

例题 3

如右图所示，ΔPQR 是直角三角形，$\angle R = 90°$，$\angle P = 30°$，$QR = 4 \text{ cm}$，

(a) 求 $\angle Q$；

(b) 求 PQ 的长。



解： (a) $\angle Q + 30^\circ = 90^\circ$

$\therefore \quad \angle Q = 60^\circ$

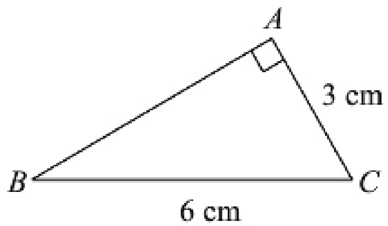
(b) $PQ = 2QR$

$= 2 \times 4$

$= 8 \text{ cm}$

例题 4

已知 ΔABC 是直角三角形，$\angle A$ 是直角，$AC = 3 \text{ cm}$，$BC = 6 \text{ cm}$，求 $\angle B$ 及 $\angle C$。



解： 如右图所示，

$AC = \frac{1}{2} BC$

即，直角边 AC 是斜边 BC 的一半

$\therefore \quad \angle B = 30^\circ$

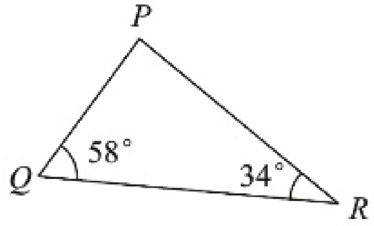
$\therefore \quad \angle C = 90^\circ - 30^\circ$

$= 60^\circ$

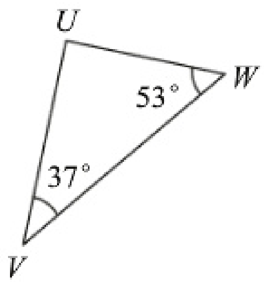
随堂练习 11

1. 判定下列各三角形是否为直角三角形，并说明原因。

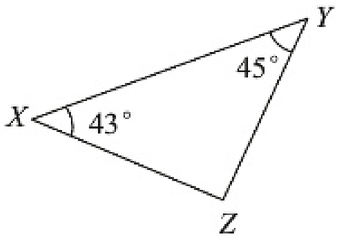
(a)



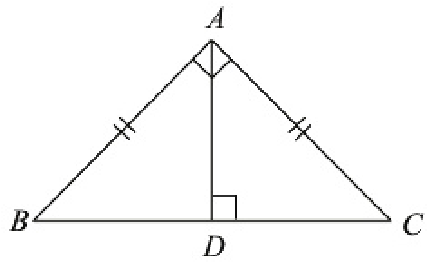
(b)



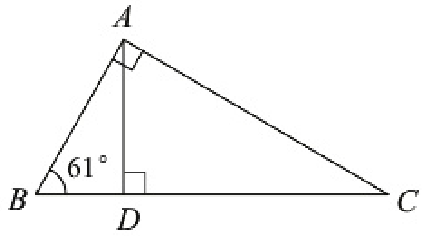
(c)



2. 如右图所示，ΔABC是等腰直角三角形，AD是BC边上的高。已知$BC=10$ cm，求AD的长。



3. 如右图所示，ΔABC是直角三角形，$\angle A=90°$，$\angle B=61°$，AD是BC边上的高。求$\angle C$，$\angle BAD$及$\angle CAD$。



点到直线的距离

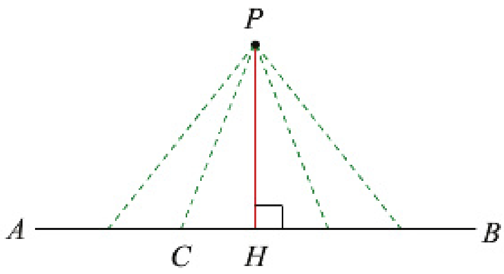


图4-36

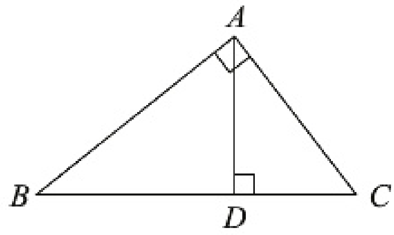
如图4-36所示，P是直线AB外的一点。点P与直线AB上各点所连接的线段，哪一条最短呢？

由于直角三角形中，直角是最大的角，所以它所对的斜边也是最大的边。因此，由图4-36可以看出，最短的线段是垂线段PH，即

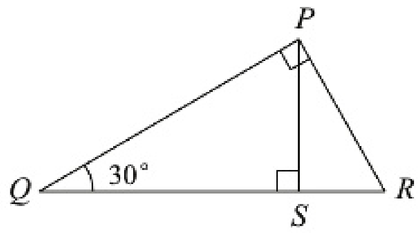
> 直线外一点与直线上各点所连接的线段中，垂线段最短。垂线段PH的长就定义成点P到直线AB的距离。

练习 4.5

1. 如右图所示，ΔABC 是直角三角形，$\angle A$ 是直角，AD 是 BC 边上的高。已知 $\angle BAD = 52°$，求 $\angle B$，$\angle C$ 及 $\angle CAD$。



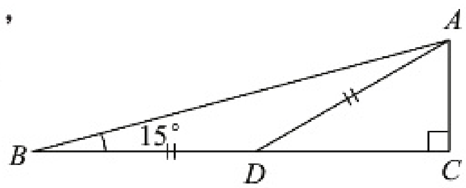
2. 如右图所示，ΔPQR 是直角三角形，$\angle P$ 是直角，$\angle Q = 30°$，PS 是 QR 边上的高。已知 $QR = 12$ cm，
   (a) 求 PR 的长；
   (b) 求 $\angle RPS$；
   (c) 求 RS 及 QS 的长。



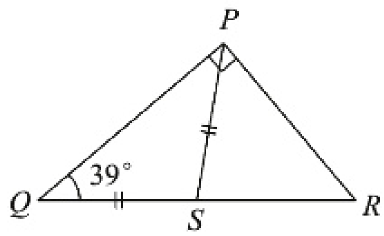
3. 一个人从山下沿 30° 的坡路登上山顶，共走了 500 m，求这座山的高度。



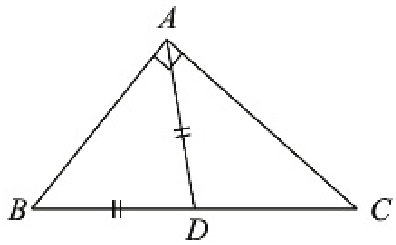
4. 如右图所示，ΔABC 是直角三角形，$\angle C$ 是直角，$\angle B = 15°$，D 是 BC 上的一点使得 $AD = BD = 6$ cm。
   (a) 求 $\angle ADC$；
   (b) 求 AC 的长。



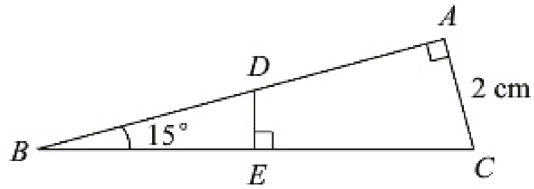
5. 右图中，ΔPQR 是直角三角形，$\angle P$ 是直角，$\angle Q = 39°$。S 是 QR 上的一点使得 $PS = QS$。
   (a) 求 $\angle SRP$；
   (b) 求 $\angle SPR$；
   (c) 若 $QR = 8$ cm，求 PS 的长。



6. 右图中，ΔABC 是直角三角形，$\angle A$ 是直角，D 是 BC 上的一点使得 $AD = BD$。
   (a) 证明 $\angle DAC = \angle DCA$；
   (b) 证明 $AD = \dfrac{1}{2}BC$。



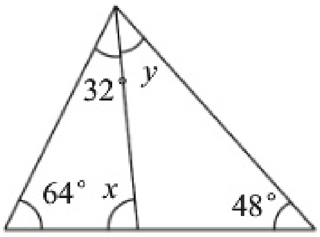
7. 右图中，ΔABC 是直角三角形，$\angle A$ 是直角，$\angle B = 15^\circ$，$AC = 2$ cm。若 DE 是线段 BC 的中垂线，求 BD 的长。
(提示：连接 CD)



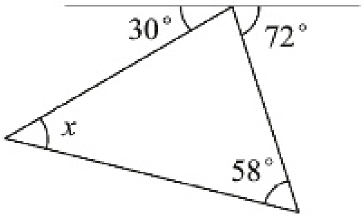
总复习题 4

1. 下列各图中，求 x、y 及 z。

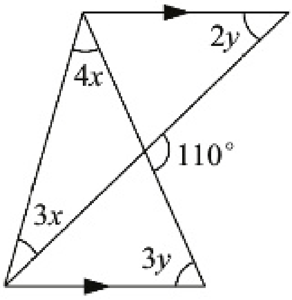
(a)



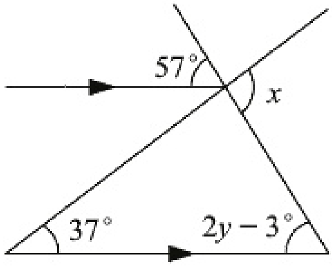
(b)



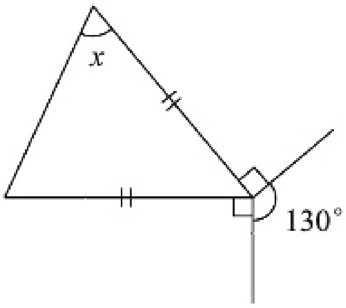
(c)



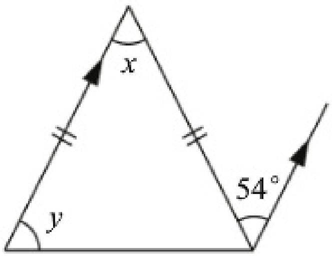
(d)



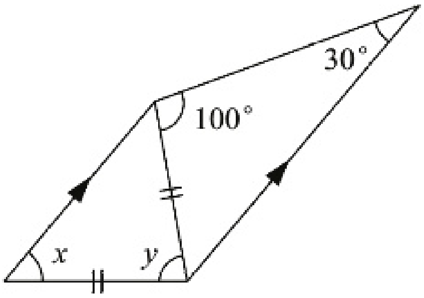
(e)



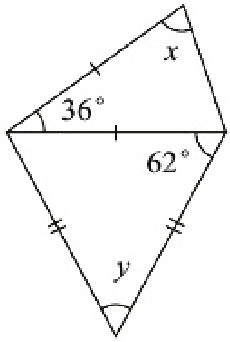
(f)



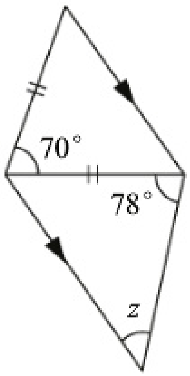
(g)


30°
100°
x
y

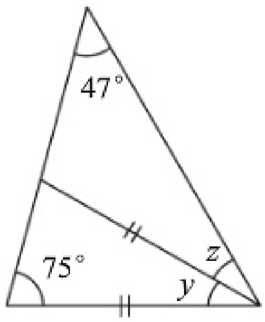
(h)


x
36°
62°
y

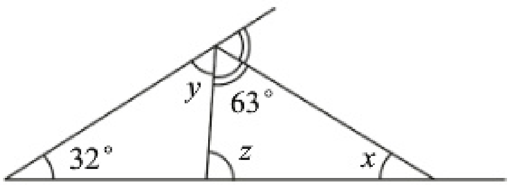
(i)


70°
78°
z

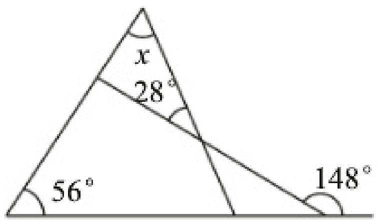
(j)


47°
75°
z
y

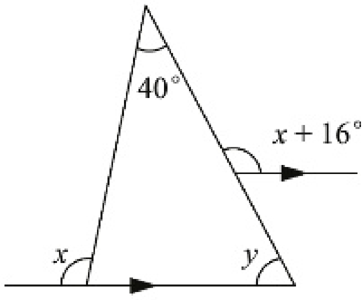
(k)


y
63°
32°
z
x

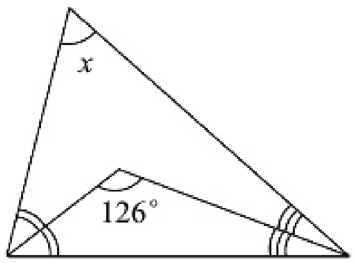
(l)


x
28°
56°
148°

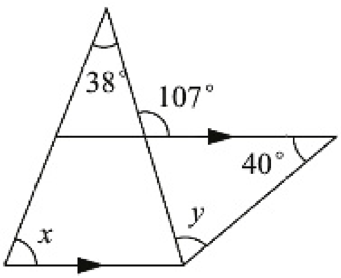
(m)


40°
x + 16°
x
y

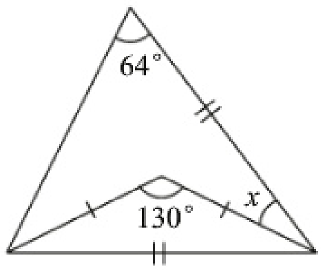
(n)


x
126°

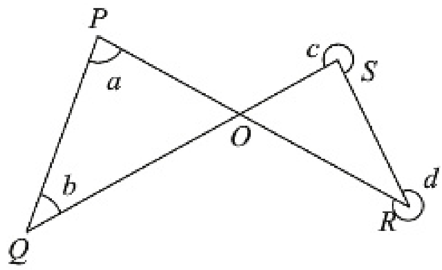
(o)


38°
107°
40°
y
x

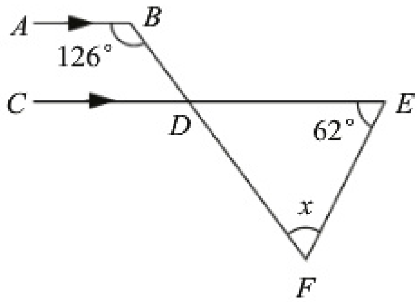
(p)


64°
x
130°

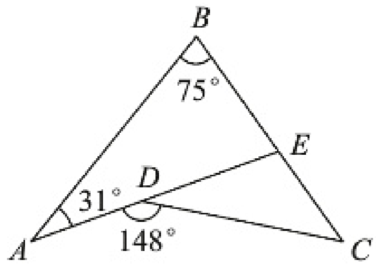
2. 已知ΔABC中，$\angle A:\angle B:\angle C=3:4:5$，求$\angle A$，$\angle B$及$\angle C$。
3. 已知ΔPQR中，$\angle P:\angle Q:\angle R=3:8:4$。判定哪一个角是钝角，并求其度数。
4. 已知ΔABC中，$AB=7\text{ cm}$，$BC=4\text{ cm}$，求AC的长度的范围。
5. 右图中，直线PR与QS相交于点O。求$a+b+c+d$。



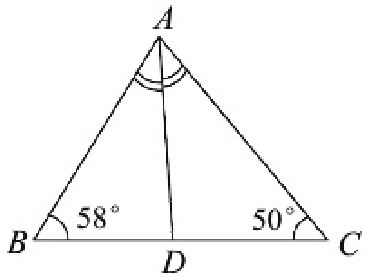
6. 右图中，BDF及CDE为直线，$AB\,//\,CE$，$\angle ABD=126°$，$\angle DEF=62°$。求x。



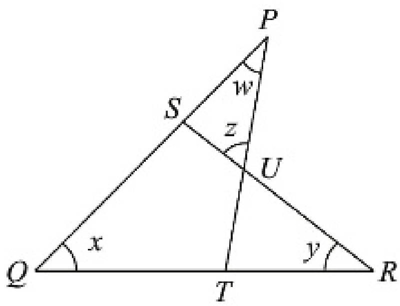
7. 右图中，ADE及BEC为直线，$\angle B=75°$，$\angle BAD=31°$，$\angle ADC=148°$。求$\angle ECD$。



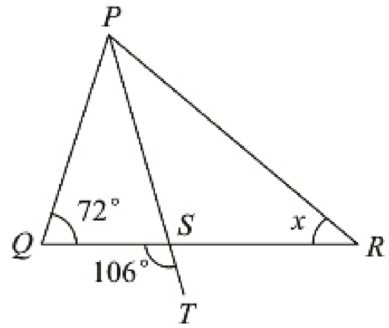
8. 右图中，AD是$\angle BAC$的平分线，$\angle B=58°$，$\angle C=50°$，求$\angle ADB$及$\angle ADC$。



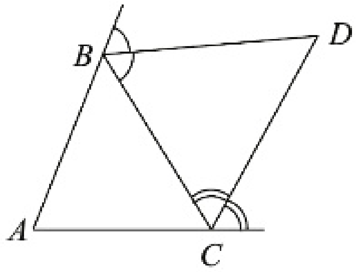
9. 右图中，QSP，QTR，PUT及SUR都是直线。求$x+y+z+w$。



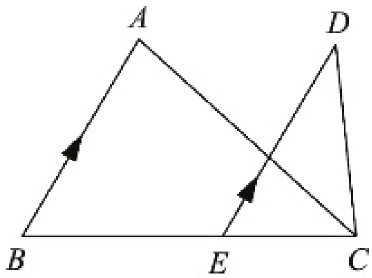
10. 右图中，QSR 及 PST 为直线，PT 平分 $\angle QPR$，$\angle Q = 72°$，$\angle QST = 106°$。求 x。



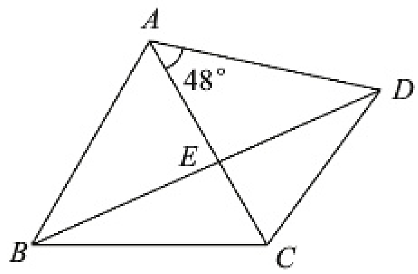
11. 右图所示的 ΔABC 中，BD 及 CD 分别是 $\angle ABC$ 及 $\angle ACB$ 的外角平分线。已知 $\angle A = 68°$，求 $\angle D$。



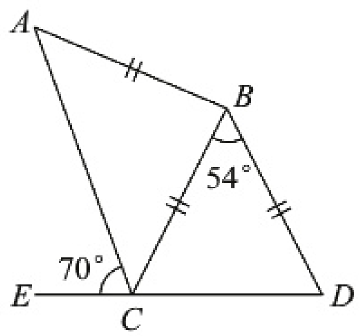
12. 右图中，BEC 是一条直线，$AB // DE$。已知 $\angle A = 79°$，$\angle D = 37°$，求 $\angle DCA$。



13. 右图中，ΔABC 是等边三角形，ΔACD 是等腰三角形，$AC = AD$。AC 与 BD 相交于点 E，$\angle CAD = 48°$。求 $\angle CED$。

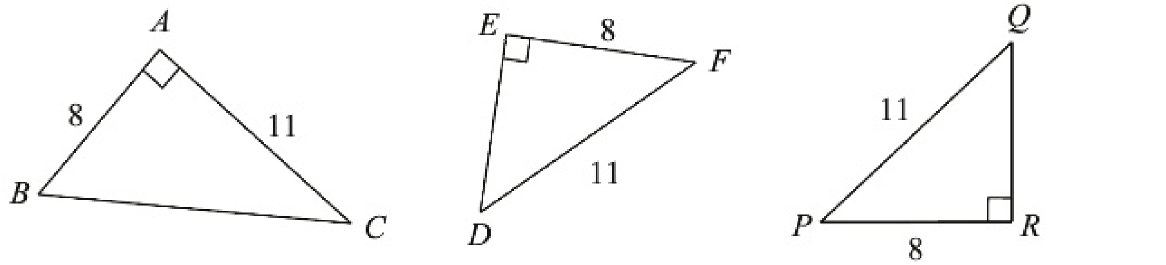


14. 右图中，ECD 是直线，$AB = BC = BD$，$\angle ACE = 70°$，$\angle CBD = 54°$，求 $\angle ABC$。

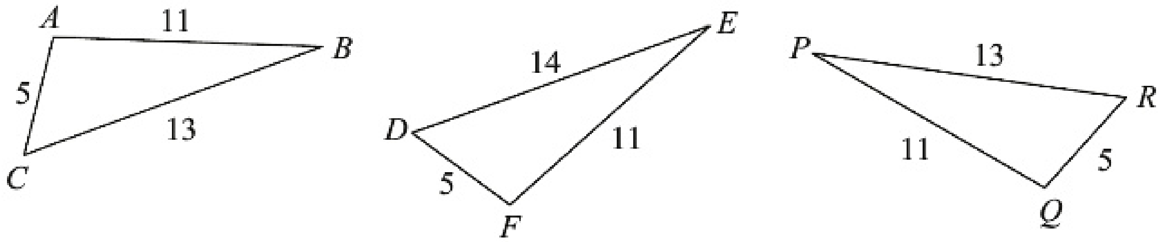


15. 下列各题中，按对应顶点的顺序写出一对全等三角形的名称，并说明原因。

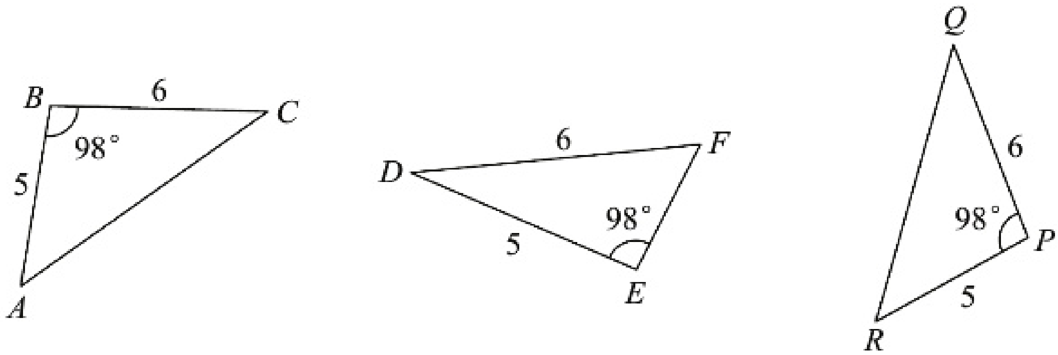
(a)



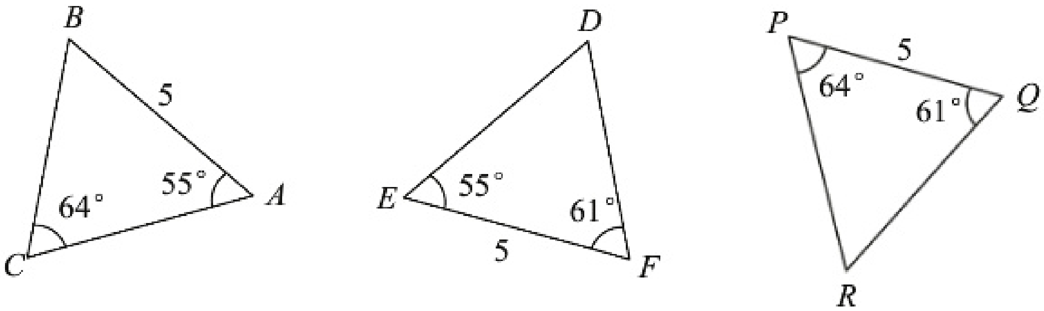
(b)



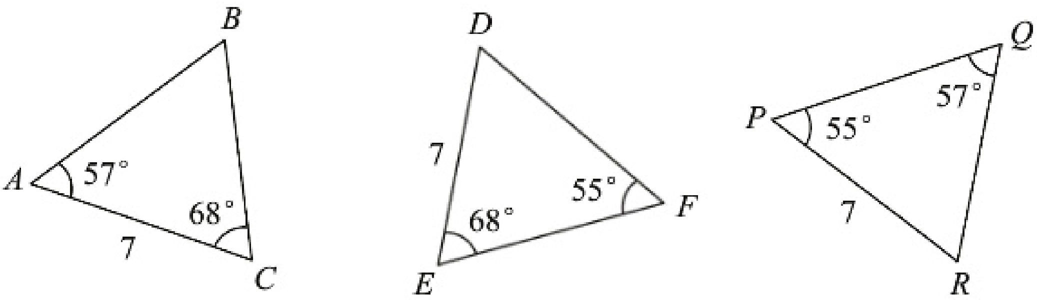
(c)



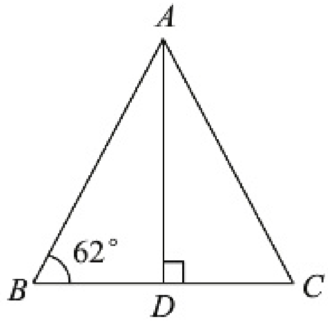
(d)



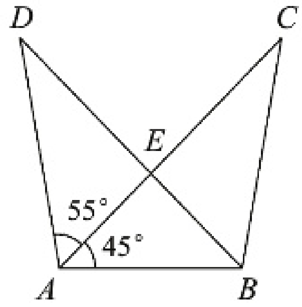
(e)



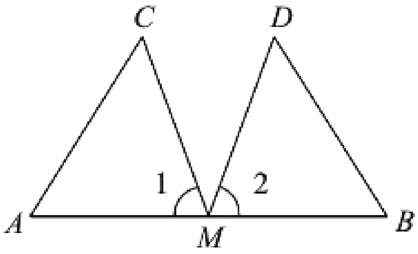
16. 右图中，$\Delta ABD \cong \Delta ACD$， $CD = 4\text{ cm}$， $\angle B = 62°$。
(a) 求 BC；
(b) 求 $\angle BAC$。



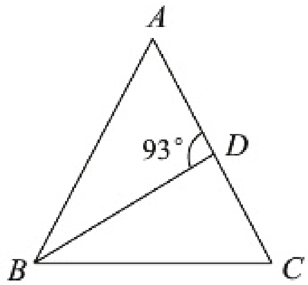
17. 右图中，$\Delta ABD \cong \Delta BAC$， $\angle DAE = 55°$， $\angle EAB = 45°$，$CE = 8$， $AE = 5$。
(a) 求 BD 的长；
(b) 求 $\angle ACB$；
(c) 证明 ΔAEB 是等腰直角三角形。



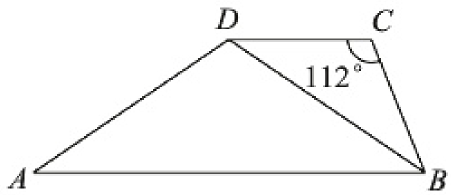
18. 右图中，M 是线段 AB 的中点。已知 $\angle 1 = \angle 2$，$MC = MD$。
(a) 证明 $\Delta ACM \cong \Delta BDM$；
(b) 若 $\angle C = 52°$， $\angle 2 = 70°$，求 $\angle B$；
(c) 证明 $AC = BD$。



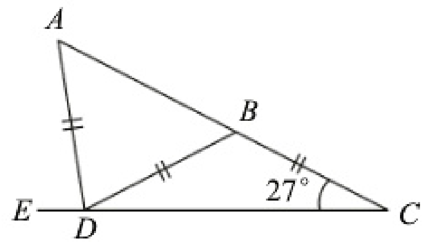
19. 右图中，$AB = AC$，BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，$\angle ADB = 93°$，求 $\angle A$。



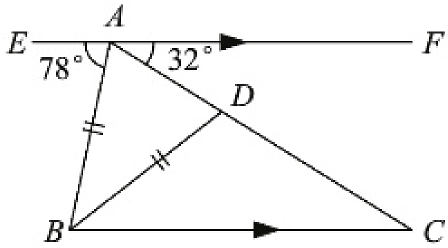
20. 右图中，$AB // CD$， $AD = DB$， $DC = CB$，$\angle DCB = 112°$。求 $\angle DAB$ 及 $\angle ADB$。



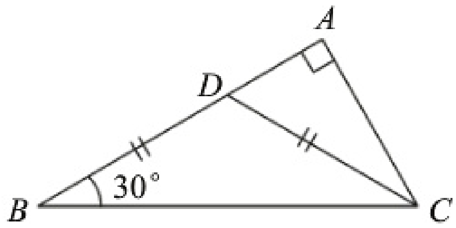
21. 右图中，EDC是直线，$AD=DB=BC$，$\angle C=27°$。求$\angle ADE$。



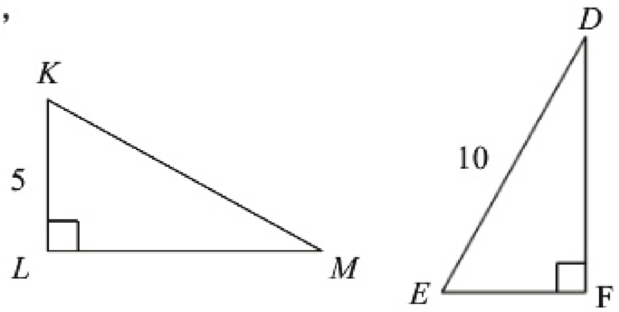
22. 右图中，EAF是一条直线，$AB=BD$，$\angle EAB=78°$，$\angle FAC=32°$。求$\angle DBC$。



23. 右图中，ΔABC是直角三角形，$\angle A$是直角，$\angle B=30°$。D是AB上的一点使得$DB=DC$，$AB=12$ cm。
    (a) 求$\angle ACD$；
    (b) 求AD的长。



24. 右图中，$\Delta KLM \cong \Delta EFD$。若$\angle M=30°$，
    (a) 求KM及EF；
    (b) 求$\angle K$，$\angle D$及$\angle E$。



5 四边形与多边形

学习目标

- 掌握各种四边形的性质与判定
- 理解各种四边形之间的关系
- 能计算多边形的内角与外角



5.1 四边形

由四条线段所围成的平面图形叫做四边形。如图5-1所示的四边形$ABCD$，它是由线段AB、BC、CD及DA所围成，这些线段称为四边形$ABCD$的边；边与边的交点A、B、C、D称为顶点。

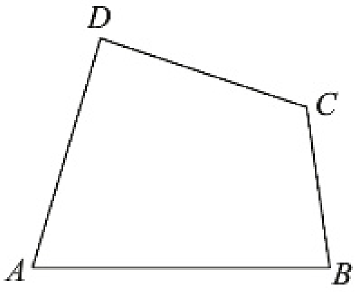


图5-1

四边形是以其顶点来命名的。在命名时，必须按照顶点的顺序。如图5-1所示的四边形可命名为四边形$ABCD$，$BCDA$，$ADCB$等，但不能命名为$ACBD$，$BDCA$等。

在四边形内，两个相邻的边所组成的角称为内角，不相邻的内角称为对角，不相邻的边称为对边。例如，图5-1所示的四边形$ABCD$，其内角为$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$及$\angle D$；$\angle A$与$\angle C$互为对角，$\angle B$与$\angle D$互为对角；AB与CD互为对边，BC与DA互为对边。

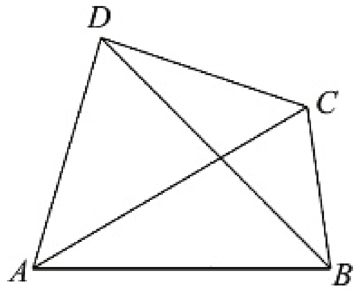


图5-2

连接两个不相邻顶点的线段称为四边形的对角线。如图5-2所示，AC及BD为四边形$ABCD$的对角线。

上一章中，我们已经推导出，三角形的内角和为180°，那么四边形的内角和又是多少呢？

如图5-3所示，四边形$ABCD$的对角线AC将四边形分成两个三角形ΔABC及ΔADC，因此，四边形$ABCD$的内角和为两个三角形ΔABC及ΔADC的内角之和，即 $180°+180°=360°$。

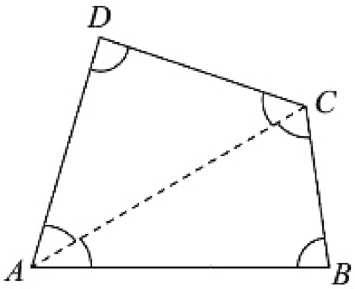


图5-3

四边形四个内角的和等于360°。



思考题

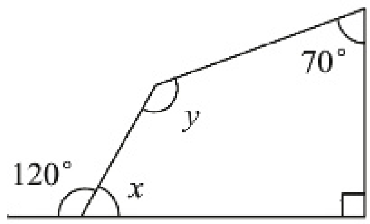
一个四边形四个外角的和是多少？

例题 1

右图中，求x及y。

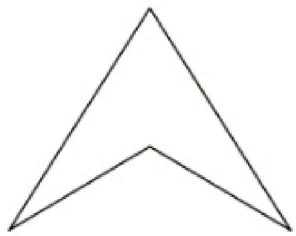
解： $x = 180° - 120°$
$= 60°$

$y = 360° - 70° - 90° - x$
$= 200° - 60°$
$= 140°$



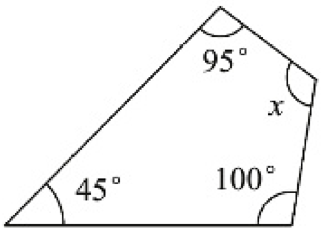
随堂练习 1

1. 右边的图形是否为一个四边形？其内角和是多少？

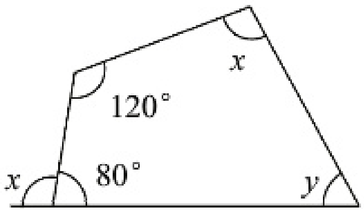


2. 下列各图中，求x及y:

(a)



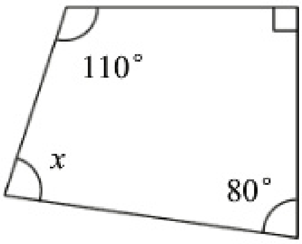
(b)



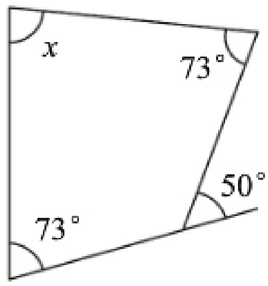
练习 5.1

下列各图中，求x及y：

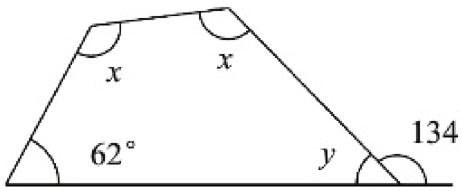
1.



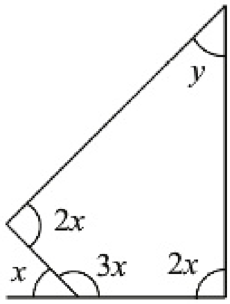
2.



3.



4.



5.2 平行四边形

两组对边分别平行的四边形称为平行四边形。如图5-4所示的$ABCD$是平行四边形。

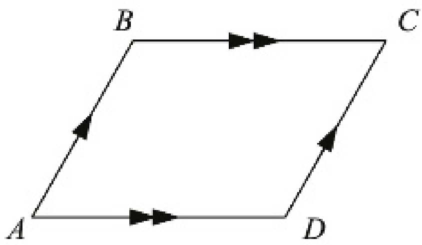


图5-4

平行四边形的性质

如图5-4所示，由于$AD // BC$，

$\angle B + \angle A = 180°$　(同旁内角互补)

同样的，由于$AB // DC$，

$\angle C + \angle B = 180°$　(同旁内角互补)

$\therefore\ \angle C = \angle A$

同理，$\angle D=\angle B$。

因此，我们得出平行四边形一个重要的性质：

平行四边形的对角相等。

如图5-5所示，$ABCD$是平行四边形。作对角线AC，我们可证明ΔABC与ΔCDA全等：

$\angle 1=\angle 4$　($AB /\!/ DC$，内错角相等)

$\angle 2=\angle 3$　($AD /\!/ BC$，内错角相等)

AC为公共边。

$\therefore$　$\Delta ABC\cong\Delta CDA$　(ASA)

$\therefore$　$AB=DC$　(三角形全等，对应边相等)

$\therefore$　$AD=BC$　(三角形全等，对应边相等)

即，我们证明了以下的性质：

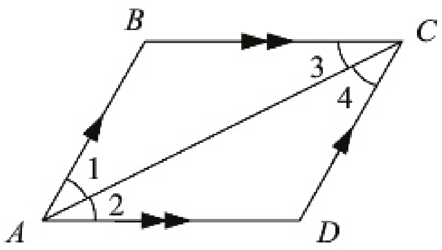


图5-5

平行四边形的对边相等。

如图5-6所示，$ABCD$是平行四边形，其对角线AC及BD相交于点E。我们可证明ΔABE与ΔCDE全等：

$\angle 1=\angle 3$　($AB /\!/ DC$，内错角相等)

$\angle 2=\angle 4$　($AB /\!/ DC$，内错角相等)

$AB=DC$　(平行四边形对边相等)

$\therefore$　$\Delta ABE\cong\Delta CDE$　(ASA)

$\therefore$　$AE=CE$　(三角形全等，对应边相等)

$\therefore$　$BE=DE$　(三角形全等，对应边相等)

即，我们证明了以下的性质：

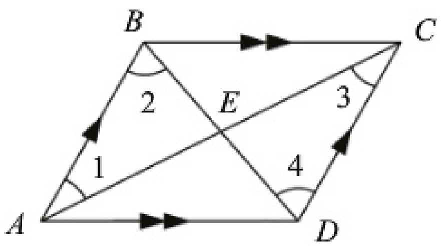
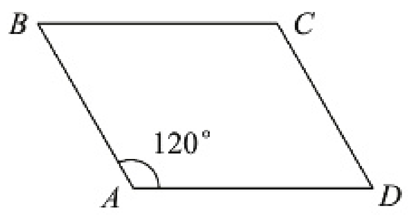


图5-6

平行四边形的对角线互相平分。

例题 1

右图中，$ABCD$是平行四边形，$\angle A=120°$。求$\angle B$、$\angle C$及$\angle D$。



解： $\angle B+120°=180°$ （$AD/\!/BC$，同旁内角互补）

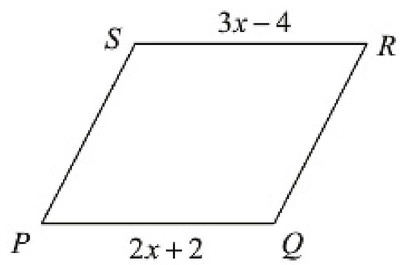
$\therefore \quad \angle B=60°$

$\angle C=\angle A=120°$ （平行四边形对角相等）

$\angle D=\angle B=60°$ （平行四边形对角相等）

例题 2

右图中，$PQRS$是平行四边形，$PQ=2x+2$，$RS=3x-4$，求PQ的长。



解： $PQ=RS$ （平行四边形对边相等）

$2x+2=3x-4$

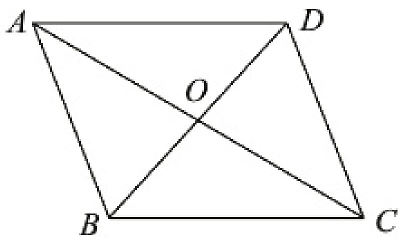
$\therefore \quad x=6$

$\therefore \quad PQ$的长$=2(6)+2$

$=14$

例题 3

右图中，$ABCD$是一平行四边形。已知$AC=16$ cm，$BD=12$ cm，求OA及OB的长。



解： $OA=\frac{1}{2}AC$ （平行四边形对角线互相平分）

$=8$ cm

(续) $OB=\frac{1}{2}BD$ (平行四边形对角线互相平分)

$=6\text{cm}$

随堂练习 2

1. 是非题：

   (a) 平行四边形的对边平行。 ______

   (b) 平行四边形的四个边都相等。 ______

   (c) 平行四边形的对角相等。 ______

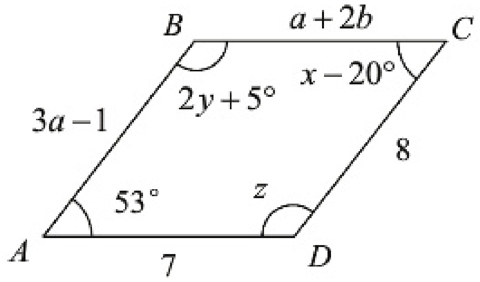
   (d) 平行四边形的内角和等于180°。 ______

   (e) 平行四边形的对角线互相平分。 ______

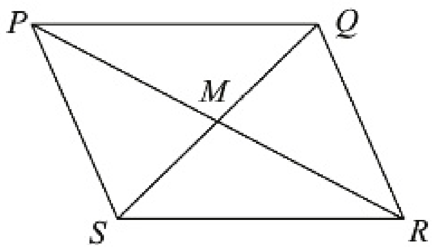
   (f) 平行四边形是点对称图形。 ______

   (g) 平行四边形是线对称图形。 ______

2. 右图中，$ABCD$为平行四边形。求a、b、x、y及z的值。

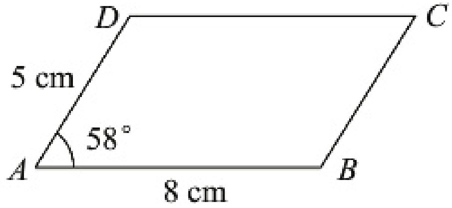


3. 右图中，$PQRS$为平行四边形。已知$PM=4\text{cm}$，$QS=6\text{cm}$，求QM及PR的长。

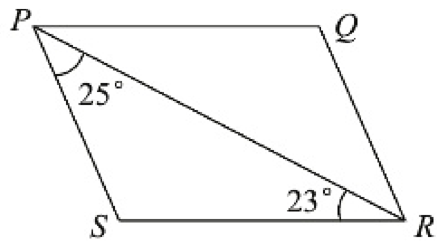


练习 5.2a

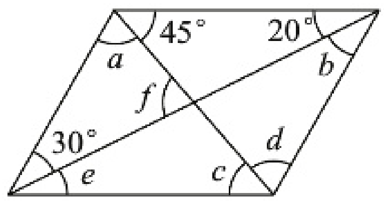
1. 右图中，$ABCD$为平行四边形。求
   (a) $\angle B$，$\angle C$及$\angle D$；
   (b) BC及CD的长。



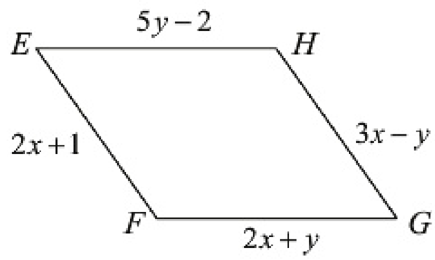
2. 右图中，$PQRS$为平行四边形。求$\angle PSR$及$\angle SPQ$。



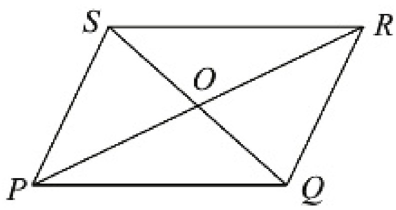
3. 右图所示为一平行四边形。求a、b、c、d、e及f。



4. 右图中，$EFGH$为平行四边形。求EF及EH的长。

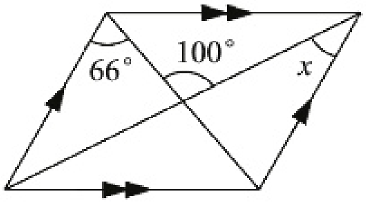


5. 右图中，$PQRS$为平行四边形。已知$OS = x + 3$，$OQ = 2x - 2$，$PR = 3x - 1$。求PR的长。

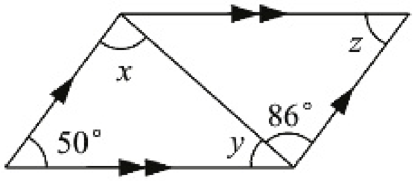


6. 下列各图中，求x、y及z。

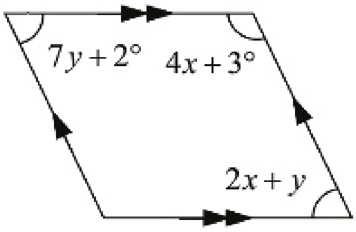
(a)



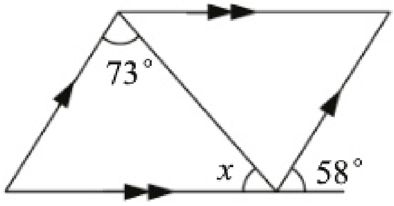
(b)



(c)



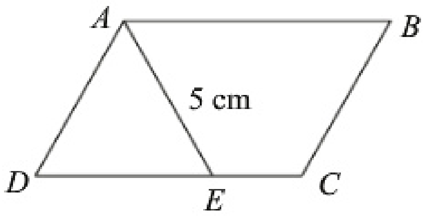
(d)



7. 右图中，$ABCD$是平行四边形，ΔADE是等边三角形，$DE:EC=2:1$，$AE=5\,\text{cm}$。求

(a) $\angle B$及$\angle C$；

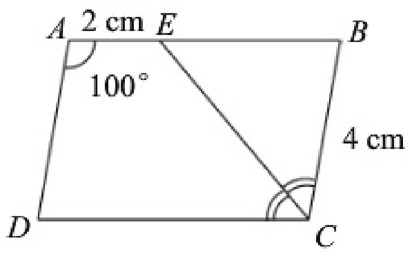
(b) AD及AB的长。



8. 右图中，$ABCD$是平行四边形，CE是$\angle BCD$的平分线，$\angle A=100°$，$AE=2\,\text{cm}$，$BC=4\,\text{cm}$。

(a) 求$\angle AEC$；

(b) 求CD的长。

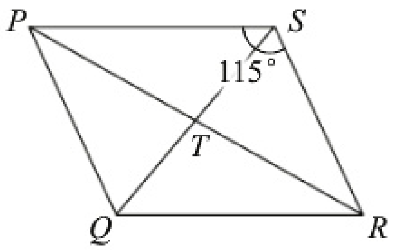


9. 右图中，$PQRS$是平行四边形，PR与QS相交于点T，$\angle PSR=115°$。已知$QR=6\,\text{cm}$，$QT=3\,\text{cm}$，求

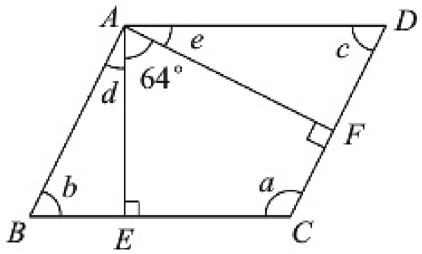
(a) QS的长；

(b) $\angle SRQ$；

(c) $\angle SQR$。



10. 右图中，$ABCD$是平行四边形，AE与AF分别垂直于BC与CD。已知$\angle EAF=64°$，求a，b，c，d及e。



平行四边形的判定

根据平行四边形的定义，两组对边平行的四边形是平行四边形。除此之外，我们还有以下的定理可判定一个四边形是平行四边形：

> 两组对角分别相等的四边形是平行四边形。

> 两组对边分别相等的四边形是平行四边形。

> 两条对角线互相平分的四边形是平行四边形。

这三个判定定理是前面所提到的三个性质的逆定理。除此之外，我们还有以下的判定定理：

> 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形。

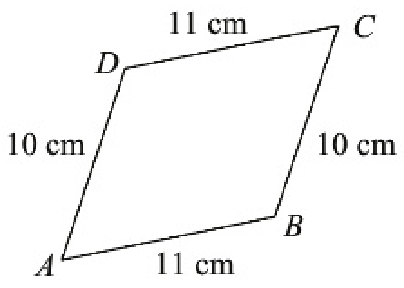
思考题

证明这些判定定理。

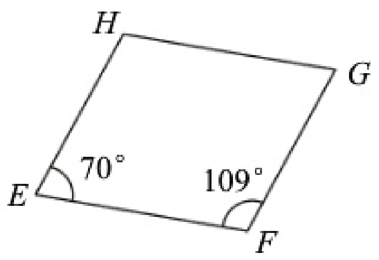
例题 4

判断下列各四边形是否为平行四边形，并说明原因。

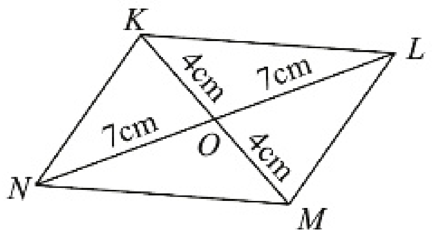
(a)



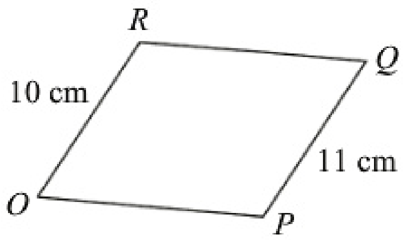
(b)



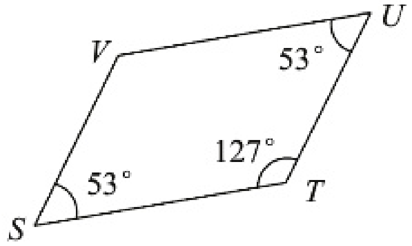
(c)



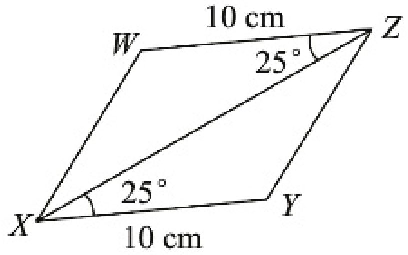
(d)



(e)



(f)



解： (a) $AB = DC = 11\,\text{cm}$

$AD = BC = 10\,\text{cm}$

∴ $ABCD$是平行四边形 (两组对边分别相等)

(b) $\angle E + \angle F = 70° + 109°$

$= 179°$

$\angle E$ 与 $\angle F$ 不互补

∴ EH 与 FG 不平行

∴ $EFGH$ 不是平行四边形

(c) $OK = OM = 4\,\text{cm}$

$OL = ON = 7\,\text{cm}$

∴ $KLMN$ 是平行四边形 (两条对角线互相平分)

(d) $OR \neq PQ$

∴ $OPQR$ 不是平行四边形 (对边不相等)

(e) $\angle V = 360° - 53° - 127° - 53°$

$= 127°$

$\angle S = \angle U = 53°$

$\angle T = \angle V = 127°$

∴ $STUV$ 是平行四边形 (两组对角分别相等)

(f) $\angle WZX = \angle ZXY = 25°$

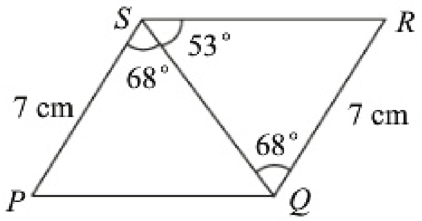
∴ $WZ \parallel XY$ (内错角相等，两直线平行)

$WZ = XY = 10\,\text{cm}$

∴ $WXYZ$是平行四边形 (一组对边平行且相等)

例题 5

右图中，求$\angle P$。



解： $\angle PSQ = \angle SQR = 68°$

$\therefore\ PS // QR$ (内错角相等，两直线平行)

$PS = QR = 7\,\text{cm}$

$\therefore\ PQRS$是平行四边形 (一组对边平行且相等)

$\therefore\ \angle P = \angle R$ (平行四边形对角相等)

$= 180° - 53° - 68°$

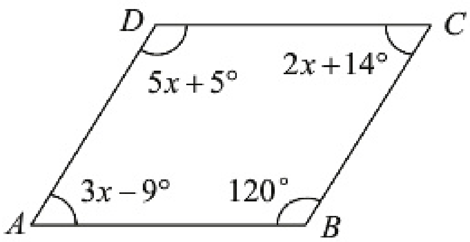
$= 59°$

例题 6

右图中，

(a) 求x；

(b) 证明$ABCD$是平行四边形。



解： (a) $(3x-9°)+(5x+5°)+(2x+14°)+120° = 360°$ (四边形内角和)

$10x + 130° = 360°$

$10x = 230°$

$\therefore\ x = 23°$

(b) $\angle A = 3\times 23° - 9°$

$= 60°$

$\angle C = 2\times 23° + 14°$

$= 60°$

(续)　　$\angle D = 5\times 23^\circ + 5^\circ$
$= 120^\circ$

$\because\ \angle A = \angle C = 60^\circ,\ \angle B = \angle D = 120^\circ$

$\therefore$ $ABCD$ 是平行四边形　(两组对角分别相等)

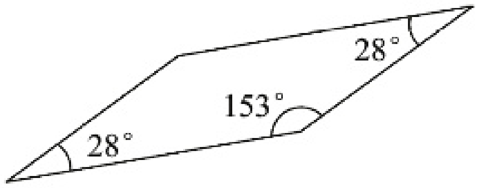
思考题

若一个四边形的一组对边平行，另一组对边相等，这个四边形会否一定是平行四边形？

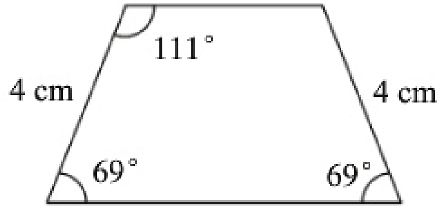
随堂练习 3

判断下列各四边形是否为平行四边形，并说明原因。

1.



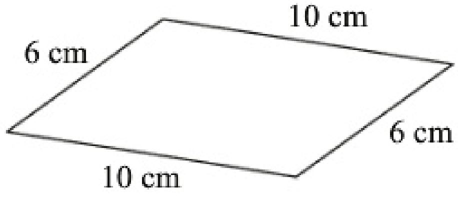
2.



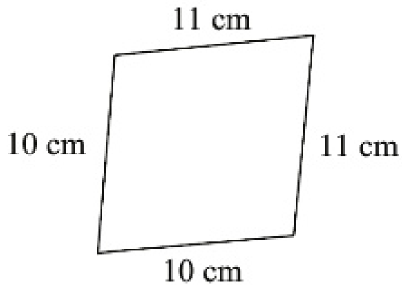
练习 5.2b

1. 判断下列各四边形是否为平行四边形，并说明原因。

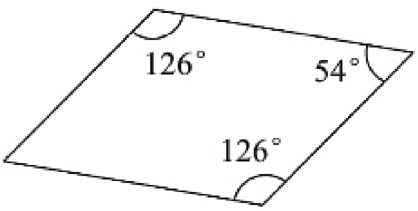
(a)



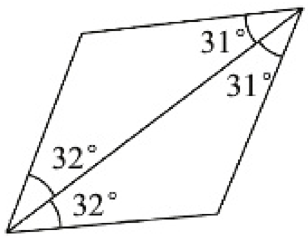
(b)



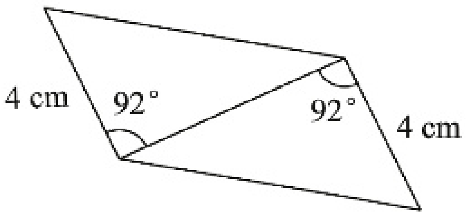
(c)



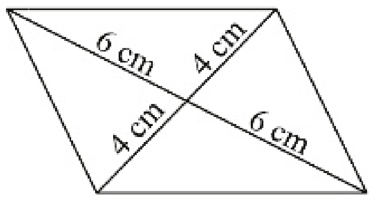
(d)



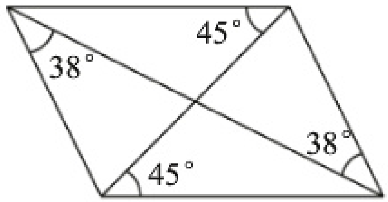
(e)



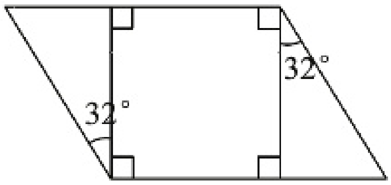
(f)



(g)



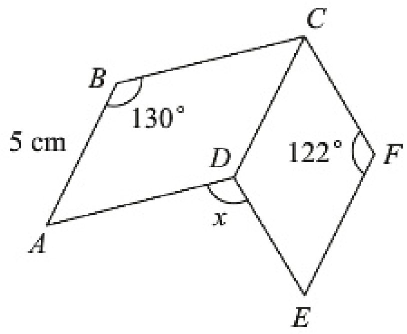
(h)



2. 右图中，$ABCD$ 及 $CDEF$ 为平行四边形。

(a) 求 EF 的长；

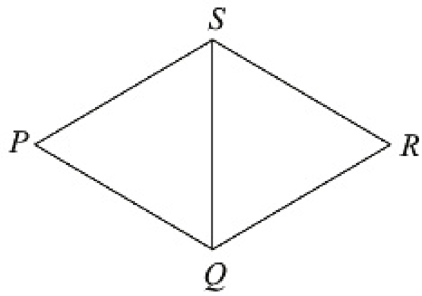
(b) 求 x。



3. 右图中，ΔPQS 及 ΔRQS 为等边三角形。

(a) 证明 $PS = QR$；

(b) 证明 $PQRS$ 是平行四边形。



5.3 长方形

四个角都是直角的四边形叫做长方形，如图5-7所示。



图5-7

由于长方形的对角相等，因此长方形是一种特殊的平行四边形，它具有平行四边形所有的性质，即

- 长方形的对边平行
- 长方形的对边相等
- 长方形的对角线互相平分

此外，长方形还具有以下的性质：

长方形的两条对角线相等。

长方形的两条对角线互相平分成四条相等的线段。

补充资料

若一个四边形的四个角都相等，则这四个角都是直角。因此，长方形也可以定义成四个角都相等的四边形。

这两个性质可以由以下的方法看出：

如图5-8所示，$ABCD$是长方形，AC与BD是对角线。由ΔABC与ΔDCB全等可得：

$$AC = DB$$

即，长方形的对角线相等。

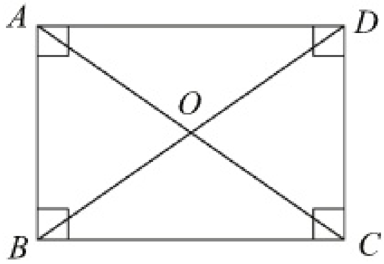


图5-8

又，由于平行四边形的对角线互相平分，

$$OA = OC = \frac{1}{2}AC$$

$$OB = OD = \frac{1}{2}BD$$

$$\therefore \quad OA = OB = OC = OD$$

即，长方形的两条对角线互相平分成四条相等的线段。

我们又如何判断一个四边形是长方形呢？除了利用定义，即四个角是直角的四边形是长方形，我们还有以下的判定定理：

> 一个角是直角的平行四边形是长方形。

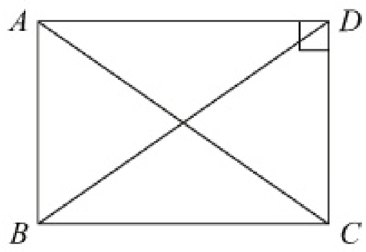
> 两条对角线相等的平行四边形是长方形。

思考题

证明这些判定定理。

例题 1

右图中，$ABCD$是平行四边形，$AC=(3x+2)\text{ cm}$，$BD=(5x-12)\text{ cm}$，$\angle ADC=90^\circ$。求x的值。



解： 由于一个角是直角的平行四边形是长方形

$\therefore$ $ABCD$是长方形

$\therefore$ $AC=BD$

$3x+2=5x-12$

$2x=14$

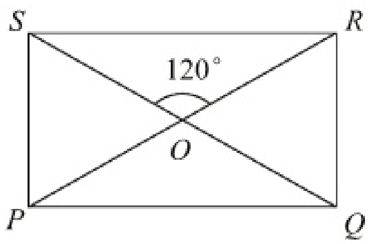
$x=7$

例题 2

右图中，$PQRS$是长方形，其对角线PR与QS相交于点O，$PS=5\text{cm}$，$\angle ROS=120^\circ$。

(a) 求$\angle OSP$；

(b) 求PR的长。



解： (a) $OP = OS$ （长方形的对角线互相平分成四条相等的线段）

$\therefore\ \angle OSP = \angle OPS$ （等边对等角）

$\angle OSP + \angle OPS = 120°$ （外角 ＝ 内对角之和）

$\therefore\ \angle OSP = \angle OPS = 60°$

(b) $\therefore\ \Delta OSP$ 是等边三角形

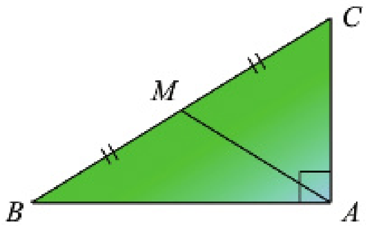
$\therefore\ OP = OS = PS = 5\text{ cm}$

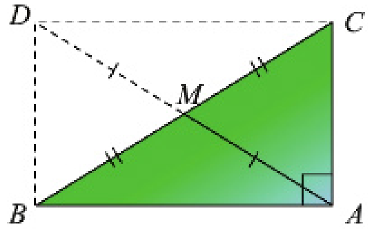
$PR = 2 \times OP$ （长方形的对角线互相平分）

$= 10\text{ cm}$

例题 3

右图中，ΔABC是直角三角形，$\angle A$是直角，AM是BC边上的中线。证明$AM = \frac{1}{2}BC$。





解： 将线段AM延长至点D使得$AM = DM$，并连接DC与DB。

四边形$ABDC$中，两条对角线AD与BC互相平分，因此$ABDC$是平行四边形。

又，由于$\angle A = 90°$，因此$ABDC$是长方形。

$\therefore\ AD = BC$ （长方形对角线相等）

$\therefore\ AM = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC$

由例题3，我们得到以下的结论：

直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半。

随堂练习 4

1. 是非题：

   (a) 长方形的每个角都是直角。

   (b) 长方形的所有边都相等。

   (c) 长方形的两条对角线相等。

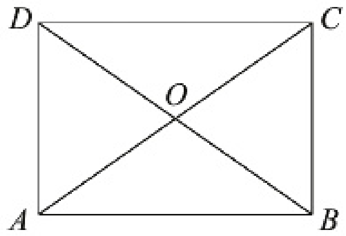
   (d) 长方形的两条对角线互相垂直。

   (e) 长方形的对角线平分其端点的角。

   (f) 长方形是线对称图形。

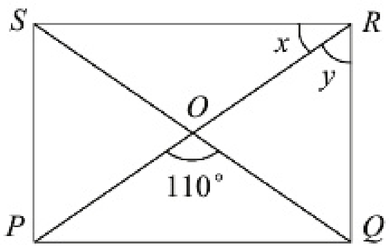
   (g) 长方形是点对称图形。

2. 右图中，$ABCD$ 是长方形，其对角线 AC 与 BD 相交于点 O。若 $OD = 4\text{cm}$，求 AC 的长。

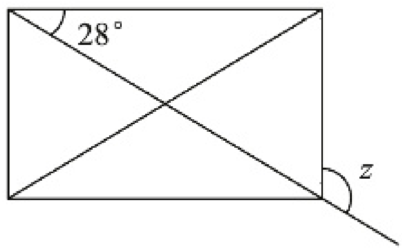


练习 5.3

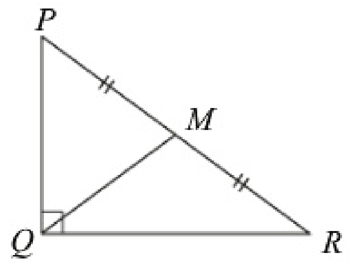
1. 右图中，$PQRS$ 是长方形，其对角线 PR 与 QS 相交于点 O，$\angle POQ = 110°$。求 x 及 y。



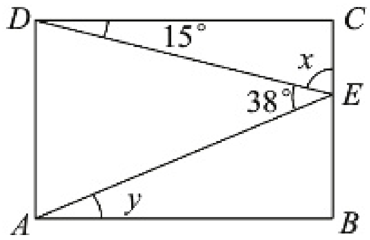
2. 右图所示为一长方形。求 z。



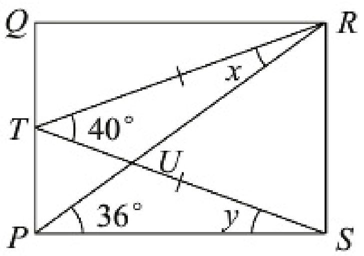
3. 右图中，ΔPQR 是直角三角形，$\angle Q$ 是直角，$PR = 15$ cm，M 是 PR 的中点。求 QM 的长。



4. 右图中，$ABCD$ 是长方形。求 x 及 y。



5. 右图中，$PQRS$ 是长方形，$TR = TS$，PR 与 TS 相交于点 U。求 x 及 y。



5.4 菱形

四个边都相等的四边形称为菱形，如图 5-9 所示。

由于菱形的对边相等，因此菱形也是一种特殊的平行四边形，它具有平行四边形所有的性质，即

- 菱形的对边平行
- 菱形的对角相等
- 菱形的对角线互相平分

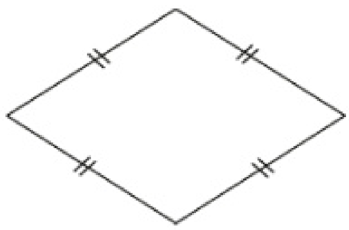


图 5-9

此外，菱形还具有以下的性质：

菱形的两条对角线互相垂直。

菱形的每条对角线平分其端点的角。

这两个性质可以由以下的方法看出：

如图5-10所示，$ABCD$是菱形，其对角线AC与BD相交于点O。

由于菱形的对角线互相平分，$AO=CO$。因此，BO是等腰三角形ΔABC的底边AC上的中线。

由等腰三角形的性质可知，BO也是ΔABC中AC边上的高及$\angle ABC$的平分线，即$BO\perp AC$且BO平分$\angle ABC$。

同理，$DO\perp AC$且DB平分$\angle ADC$。

这就证明了$BD\perp AC$且BD平分$\angle ABC$及$\angle ADC$。

同理可证AC平分$\angle BAD$及$\angle BCD$。

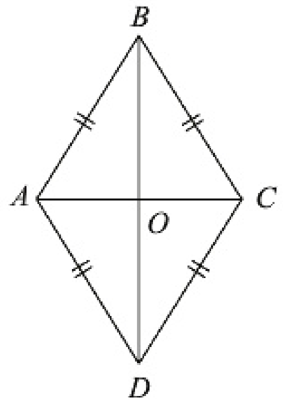


图5-10

相反的，若要判定一个四边形是菱形，除了利用定义，即四个边相等的四边形是菱形，还有以下的判定定理：

一组邻边相等的平行四边形是菱形。

两条对角线互相垂直的平行四边形是菱形。

一条对角线平分它的其中一个端点的角的平行四边形是菱形。

思考题

证明这些判定定理。

例题 1

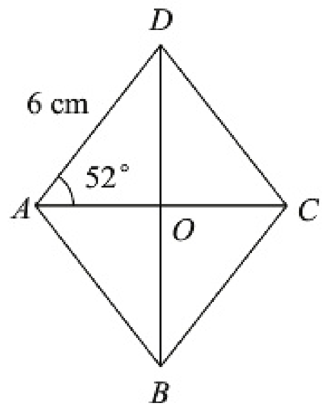
右图中，$ABCD$ 为菱形，其对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$\angle DAO=52°$，$AD=6\,\text{cm}$。求

(a) CD 的长；

(b) $\angle ADO$；

(c) $\angle DCB$；

(d) $\angle ABC$。



解： (a) $CD=AD=6\,\text{cm}$ (菱形的四边相等)

(b) $\angle AOD=90°$ (菱形的两条对角线互相垂直)

$\angle ADO=90°-52°$ (直角三角形两锐角互余)

$=38°$

(c) $\angle BAO=\angle DAO=52°$ (菱形的对角线平分其端点的角)

$\therefore\ \angle DAB=2\times 52°=104°$

$\therefore\ \angle DCB=\angle DAB=104°$ (菱形的对角相等)

(d) $\angle ABC+\angle DCB=180°$ ($AB\,//\,CD$，同旁内角互补)

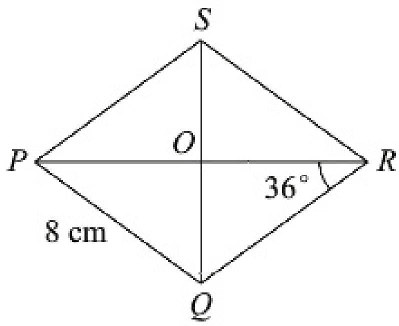
$\angle ABC=180°-104°$

$=76°$

随堂练习 5

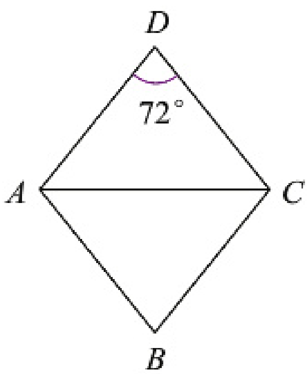
1. 是非题：
   - (a) 菱形的四个边都相等。
   - (b) 菱形的四个角都相等。
   - (c) 菱形的两条对角线相等。
   - (d) 菱形的对角线互相平分。
   - (e) 菱形的对角线互相垂直。
   - (f) 菱形是线对称图形。
   - (g) 菱形是点对称图形。
   - (h) 菱形恰有一条对称轴。
   - (i) 菱形的四个角皆为锐角。

2. 右图中，$PQRS$ 为菱形，其对角线 PR 与 QS 相交于点 O，$PQ = 8$ cm，$\angle QRO = 36°$。求
   - (a) QR、RS 及 PS 的长；
   - (b) $\angle PRS$、$\angle QPR$ 及 $\angle QPS$；
   - (c) $\angle RQO$、$\angle PQR$ 及 $\angle PSR$。

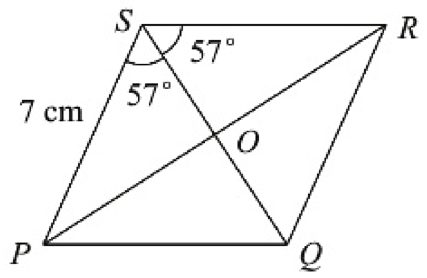


练习 5.4

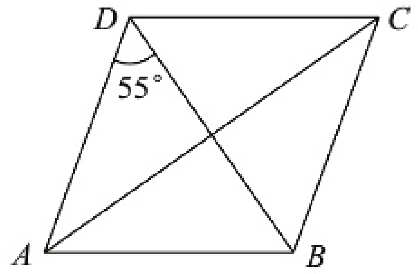
1. 右图中，$ABCD$ 为菱形，$\angle ADC = 72°$，求
   - (a) $\angle ABC$；
   - (b) $\angle DAC$；
   - (c) $\angle DCB$。



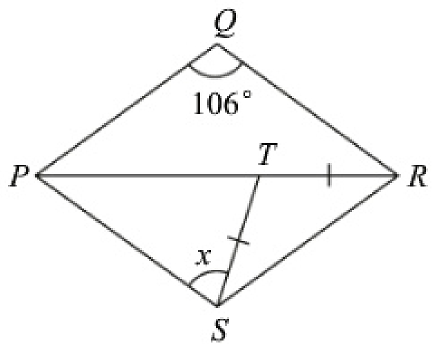
2. 右图中，$PQRS$ 为平行四边形， $PS = 7$ cm，$\angle PSQ = \angle RSQ = 57°$ 。求
   (a) PQ 的长；
   (b) $\angle POQ$；
   (c) $\angle ORQ$。



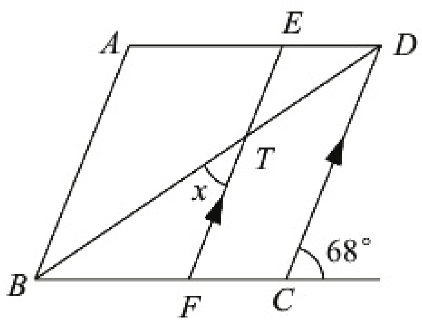
3. 右图中，$ABCD$ 为平行四边形，AC 与 BD 互相垂直，$\angle ADB = 55°$。求 $\angle DCB$。



4. 右图中，$PQRS$ 是一菱形，T 是 PR 上的一点使得 $TR = TS$ 。求 x。



5. 右图中，$ABCD$ 为菱形，$EF // DC$，EF 与 BD 相交于点 T。求 x。



5.5 正方形

四个边都相等，且四个角都是直角的四边形称为正方形，如图5-11所示。

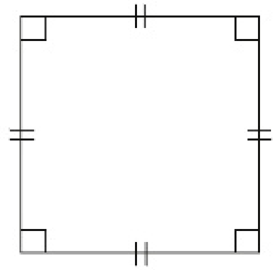


图5-11

正方形既是一种特殊的菱形，也是一种特殊的长方形。因此，它具有两者所有的性质，即：

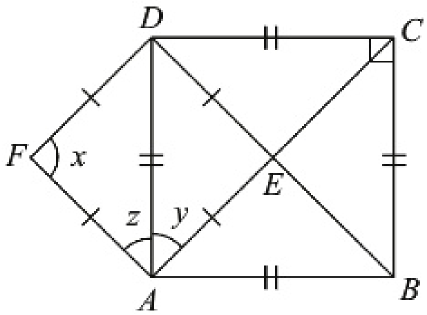
- 正方形的两条对角线相等
- 正方形的两条对角线互相垂直
- 正方形的对角线互相平分成四条相等的线段
- 正方形的对角线将其每个端点的角平分成两个45°的角。

补充资料

若一个四边形既是菱形，又是长方形，则它是正方形。

例题 1

右图中，$AB=BC=CD=DA$，$AE=ED=DF=FA$，$\angle BCD=90°$。求 x、y 及 z 的值。



解： 由于四边形 $ABCD$ 及 $AEDF$ 的四边分别相等，它们是菱形，因此也是平行四边形。

已知 $\angle BCD=90°$。

由于一个角是直角的平行四边形是长方形

$\therefore$ $ABCD$ 是长方形

$\therefore$ $ABCD$ 是正方形　(既是菱形又是长方形)

$\therefore$ $AC\perp BD$　(正方形对角线互相垂直)

即 $\angle DEA=90°$

$\therefore$ $AEDF$ 也是长方形

$\therefore$ $AEDF$ 也是正方形

$\therefore$ $x=90°$

$y=z=45°$

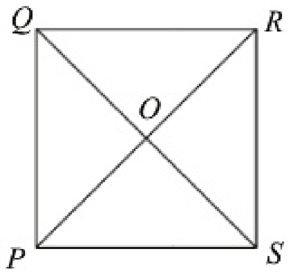
从例题 1 的解题过程可以看出

一个内角是直角的菱形是正方形。

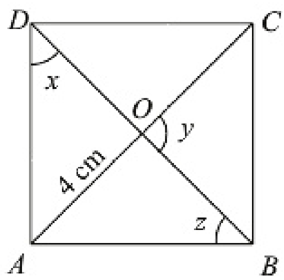
随堂练习 6

1. 是非题：
   (a) 正方形的每个角都是直角。
   (b) 正方形的每个边相等。
   (c) 正方形的对角线相等。
   (d) 正方形的对角线互相垂直。
   (e) 正方形的对角线互相平分成四个相等的线段。
   (f) 正方形的对角线将其端点的角平分成两个 45° 的角。
   (g) 正方形既是长方形，也是菱形。
   (h) 正方形是线对称图形。
   (i) 正方形是点对称图形。
   (j) 一个角是直角的菱形是正方形。
   (k) 一组邻边相等的长方形是正方形。

2. 右图中，$PQRS$ 是正方形。列出所有的等腰直角三角形。

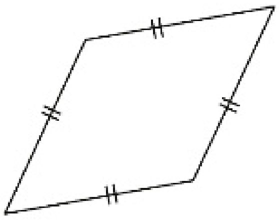


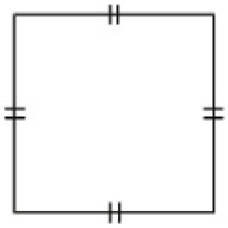
3. 右图中，$ABCD$ 是正方形，$OA = 4\,\text{cm}$。
   (a) 求 BD 的长；
   (b) 求 x、y 及 z。

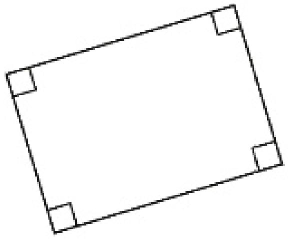


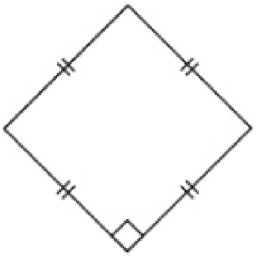
练习 5.5

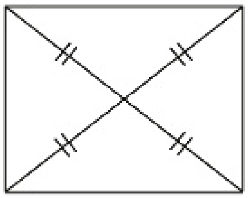
1. 根据所给的条件，判断下列各图形是否为长方形，菱形或正方形？

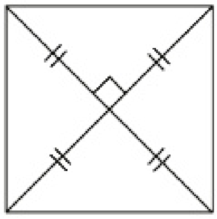
(a)


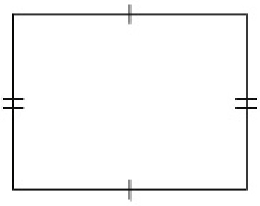
(b)


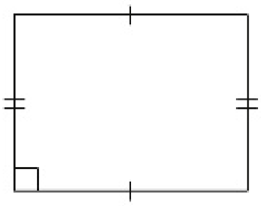
(c)


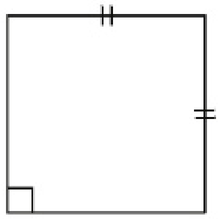
(d)


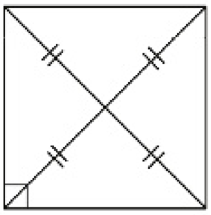
(e)


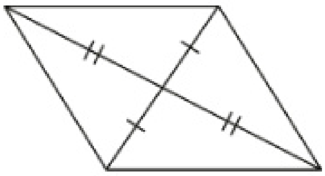
(f)


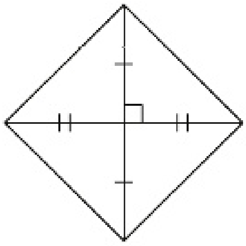
(g)


(h)


(i)


(j)


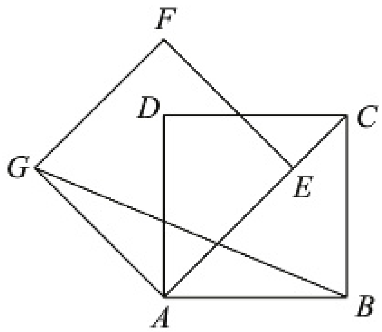
(k)


(l)


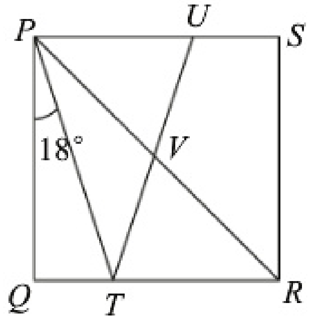
2. 右图中，$ABCD$及$AEFG$为两个边长相等的正方形，点E在直线AC上。求

(a) $\angle BAG$；

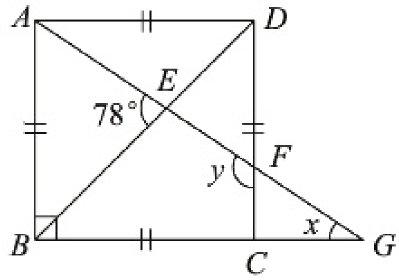
(b) $\angle BGF$。



3. 右图中，$PQRS$为正方形，$PT=TU$，$\angle QPT=18°$，PR与TU相交于点V。求
   (a) $\angle PTU$;
   (b) $\angle VTR$;
   (c) $\angle PVU$。



4. 右图中，BED及$AEFG$是直线，$AB=BC=CD=DA$，$\angle AEB=78°$。
   (a) 证明$ABCD$是正方形。
   (b) 求x及y。



5.6 风筝形

两组邻边分别相等的四边形叫做风筝形，如图5-12所示。

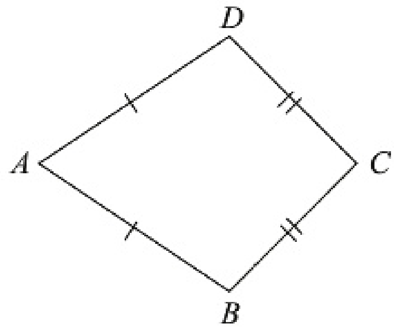


图5-12

如图5-13所示，风筝形$ABCD$的对角线AC将风筝形分成两个全等的三角形ΔABC及ΔADC。因此，

$\angle ABC=\angle ADC$

$\angle DAC=\angle BAC$

$\angle DCA=\angle BCA$

即，风筝形有以下的性质：

- 风筝形的对角$\angle B$与$\angle D$相等
- 风筝形的对角线AC平分$\angle BAD$及$\angle BCD$

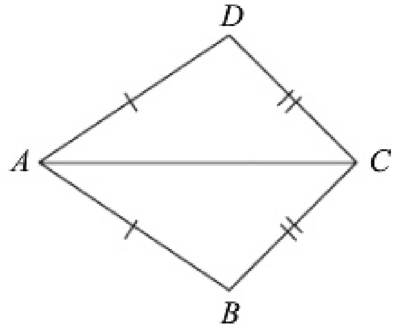


图5-13

另外，如图5-14所示，作对角线BD与对角线AC相交于点O。由ΔBCD是等腰三角形可得

$$CO \perp BD$$

且

$$BO = DO$$

因此，我们有以下的性质：

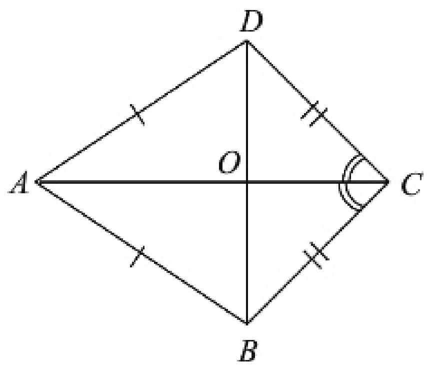


图5-14

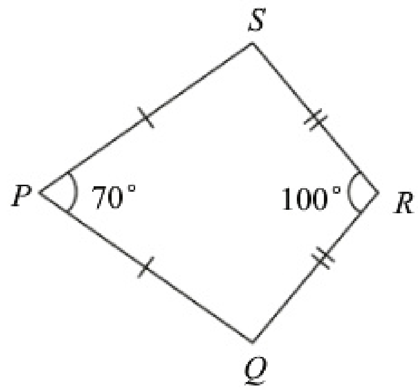
风筝形的对角线互相垂直。

此外，

- 对角线AC平分对角线BD

例题 1

右图中，求$\angle Q$。



解： $\angle Q = \angle S$　　(风筝形性质)

$$\angle P + \angle Q + \angle R + \angle S = 360^\circ \quad \text{(四边形内角和)}$$

$$\angle Q + \angle S = 360^\circ - 70^\circ - 100^\circ$$

$$2\angle Q = 190^\circ$$

$$\angle Q = 95^\circ$$

随堂练习 7

1. 是非题：

   (a) 风筝形的两条对角线相等。 --

   (b) 风筝形的对边平行。 --

   (c) 风筝形的两条对角线互相垂直。 --

(d) 风筝形的对角相等。 --

(e) 风筝形的对边相等。 --

(f) 风筝形的两条对角线互相平分。 ----------------------------------

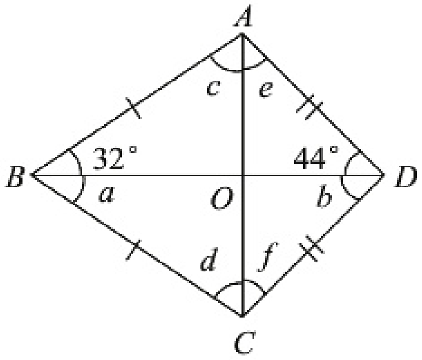
(g) 风筝形的对角互补。 --

(h) 风筝形的每条对角线平分其端点的角。 ----------------------------

(i) 风筝形是点对称图形。 --

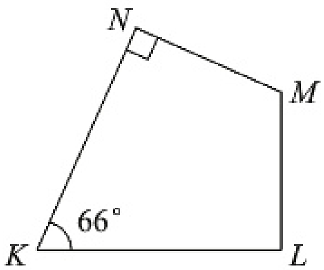
(j) 风筝形是线对称图形。 --

2. 右图中，求 a、b、c、d、e 及 f。

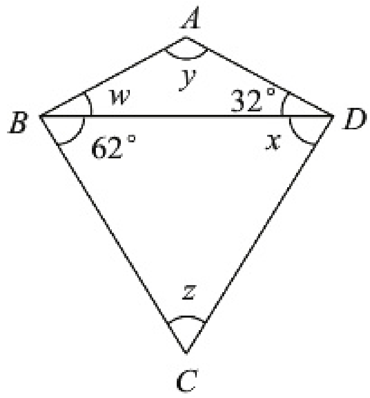


练习 5.6

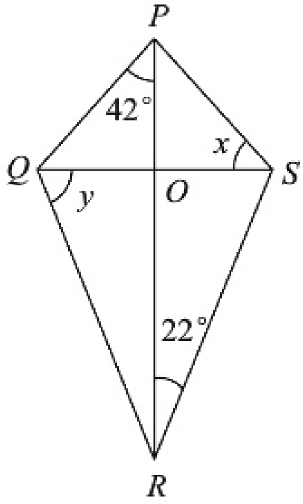
1. 右图中，$KLMN$ 是风筝形， $KL = KN$， $ML = MN$， $\angle K = 66°$， $\angle N = 90°$，求 $\angle M$。



2. 右图中，$ABCD$ 为风筝形， $AB = AD$， $CB = CD$， $\angle ADB = 32°$， $\angle CBD = 62°$。求 w，x，y 及 z。



3. 右图中，$PQRS$ 为风筝形，$PQ = PS$，$RQ = RS$，$\angle QPO = 42°$，$\angle SRO = 22°$。求 x 及 y。



5.7 梯形

一组对边平行，而另一组对边不平行的四边形叫做梯形，如图5-15所示。平行的两边叫做梯形的底，不平行的两边叫做腰。两个平行边之间的距离叫做高。

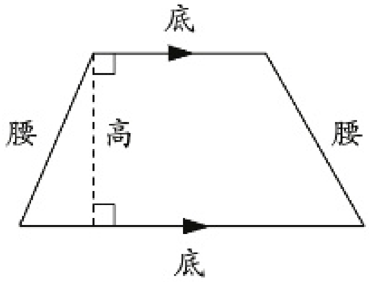


图5-15

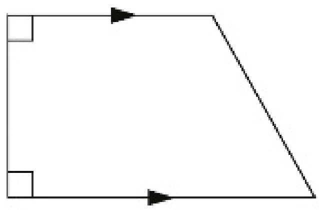


图5-16

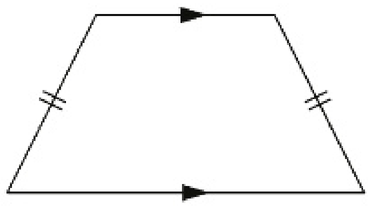


图5-17

如图5-16所示的梯形，它的其中一个腰垂直于两个底边，这样的梯形称为直角梯形。如图5-17所示的梯形，它的两个腰等长，这样的梯形叫做等腰梯形。

等腰梯形有一些特殊的性质：

> 等腰梯形一底边的两端点的角相等。

相反的，

> 若梯形一底边两端点的角相等，
> 则此梯形为等腰梯形。

另外，四边形 $ABCD$ 中，若 $\angle A=\angle B$， $AD=BC$，如图 5-18 所示，则 $ABCD$ 是等腰梯形。

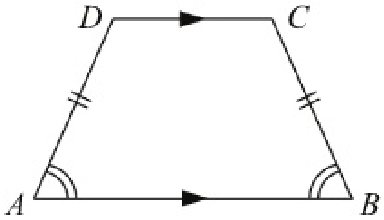
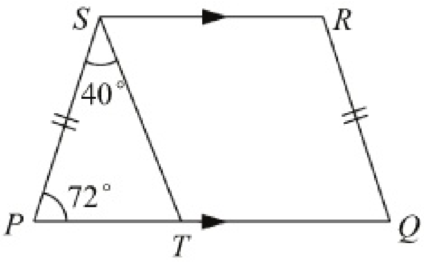


图 5-18

例题 1

右图中，$PQRS$ 为等腰梯形，$PS=QR$， $\angle SPQ=72°$，$\angle PST=40°$。求 $\angle RQP$ 及 $\angle RST$。



解： $\angle RQP=\angle SPQ=72°$

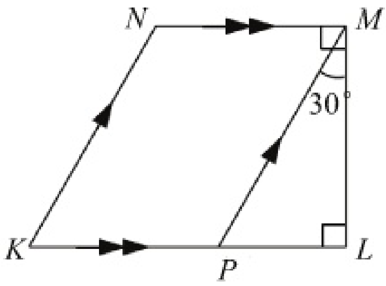
$\angle RSP+\angle SPQ=180°$　　($PQ // SR$，同旁内角互补)

$\angle RST+40°+72°=180°$

$\therefore\quad \angle RST=68°$

随堂练习 8

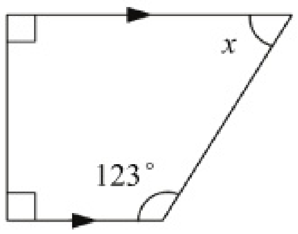
右图中，$KLMN$ 为直角梯形，$KPMN$ 为平行四边形，$\angle LMP=30°$。求 $\angle KNM$。



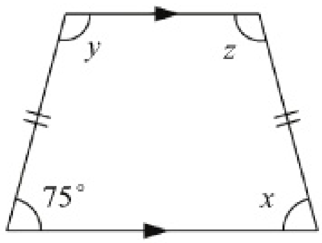
练习 5.7

1. 下列各图中，求 x，y 及 z。

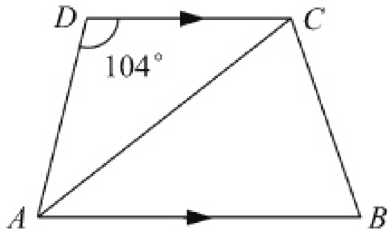
(a)



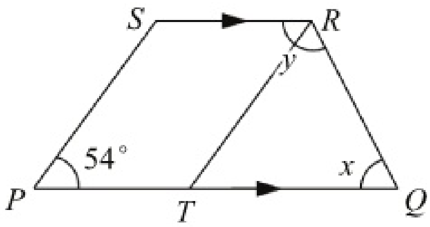
(b)



2. 右图中，$ABCD$ 是一梯形，$AB = AC$，$DA = DC$，$\angle ADC = 104°$，求 $\angle ABC$。



3. 右图中，$PQRS$ 是梯形，T 是 PQ 上的一点。已知 $PT = RS$，$TR = TQ$，$\angle P = 54°$，求 x 及 y。



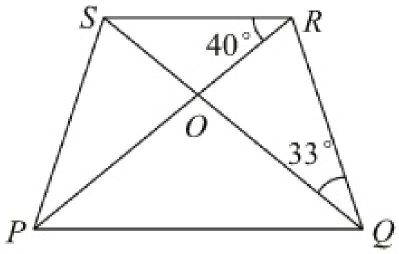
4. 右图中，$PQRS$ 是等腰梯形，$PQ // SR$，$PS = QR$，$\angle SRP = 40°$，$\angle SQR = 33°$。求

(a) $\angle SQP$；

(b) $\angle PRQ$；

(c) $\angle RPQ$；

(d) $\angle SPO$。



5.8 四边形之间的关系

图 5-19 所示为四边形之间的关系。

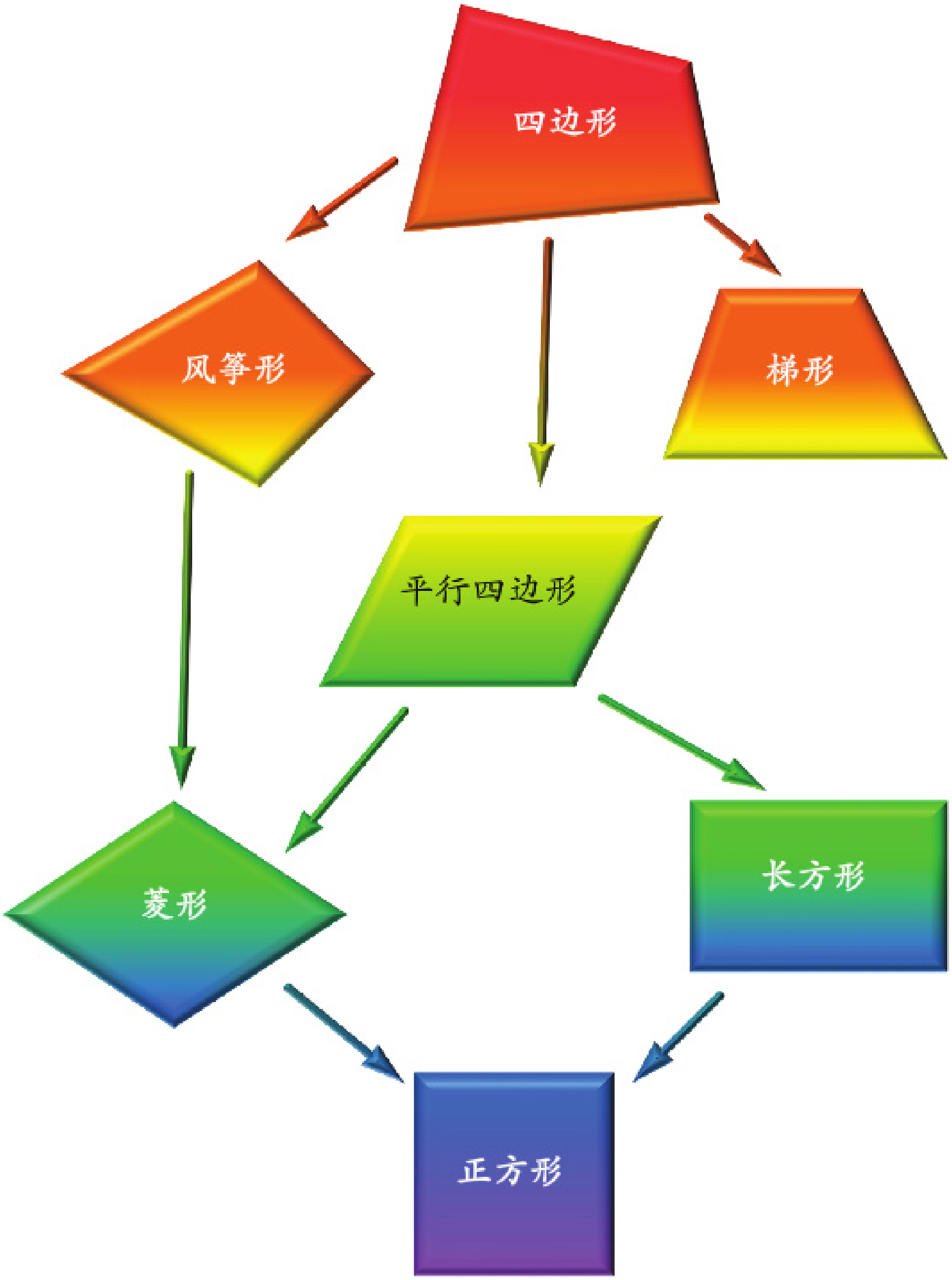


图 5-19

随堂练习 9

在梯形、风筝形、平行四边形、长方形、菱形、正方形中，

(a) 哪些是线对称图形？

(b) 哪些是点对称图形？

练习 5.8

以“✓”表示四边形有所述的性质：

性质	梯形	风筝形	平行四边形	长方形	菱形	正方形
(a) 对边平行						
(b) 对边相等						
(c) 对角相等						
(d) 对角线相等						
(e) 对角线互相平分						
(f) 对角线互相垂直						
(g) 对角线平分其端点的角						
(h) 对角线互相平分成四条等长的线段						
(i) 两组邻边相等						
(j) 三个内角是直角						
(k) 四个边相等						
(l) 四个内角相等						
(m) 没有一个角是钝角						
(n) 没有一个角是锐角						

5.9 多边形

由三条或三条以上的线段所围成的平面图形叫做多边形，围成多边形的线段称为多边形的边。被三条边围成的叫做三角形，被四条边围成的叫做四边形，被五条边围成的叫做五边形，…，被 n 条边围成的叫做 n 边形，如图 5-20 所示。

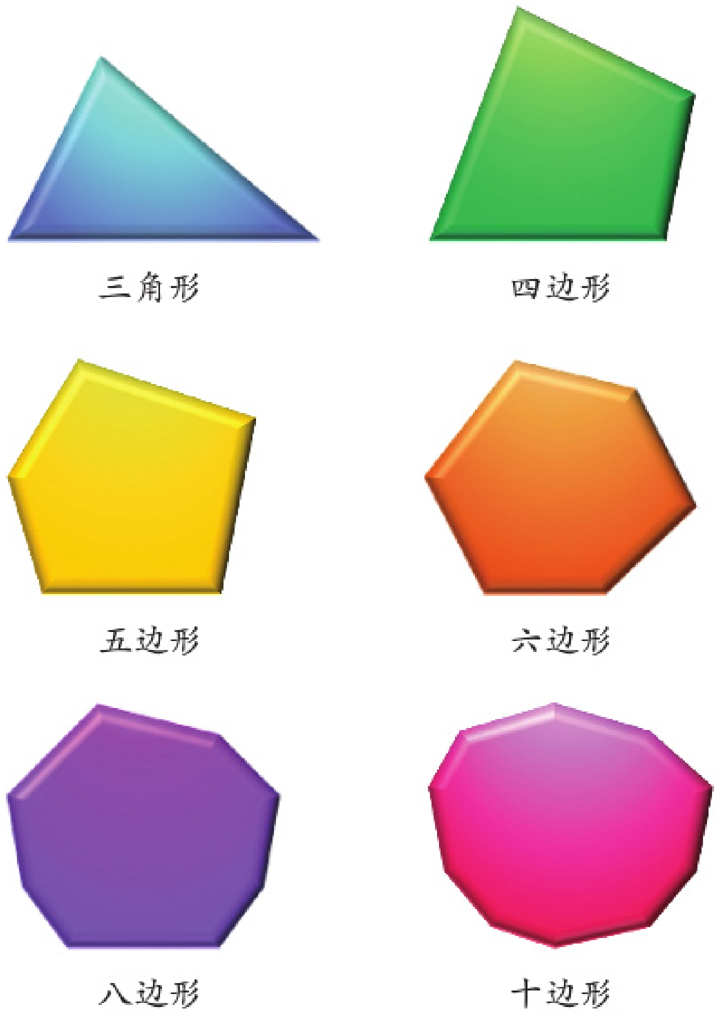


图 5-20

一个多边形中，相邻两个边的交点叫做顶点，相邻两个边所组成的角叫做内角，一个边与相邻的边的反向延长线所组成的角叫做外角。如图5-21所示，A、B、C、D、E为五边形$ABCDE$的顶点，$\angle a$、$\angle b$、$\angle c$、$\angle d$、$\angle e$为内角，$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$、$\angle 5$为外角。

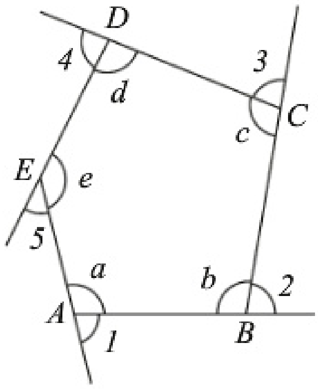


图5-21

一个多边形中，连接不相邻两个顶点的线段叫做对角线。例如：图5-22中，AC、AD、BD、BE、CE是五边形$ABCDE$的对角线。

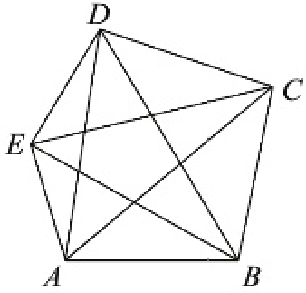


图5-22

图5-20所示的每一个多边形，它的每个内角都小于180°，这样的多边形称为凸多边形。凸多边形每一条边的无限延长线都不会穿过多边形。

另一方面，若多边形的一个或多于一个内角大于180°，则该多边形称为凹多边形。如图5-23所示的六边形$PQRSTU$，$\angle a$大于180°，因此它是凹多边形，其中RS边的延长线穿过多边形。

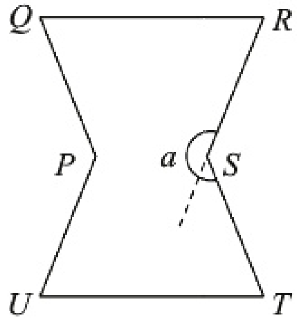
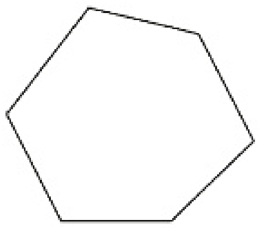
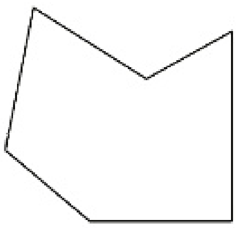
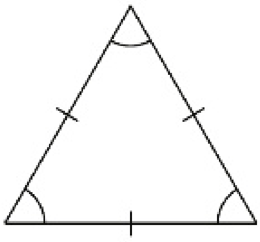


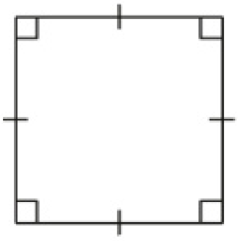
图5-23

种类	凸多边形	凹多边形
例子		
性质	所有内角小于180°	一个或以上的内角大于180°

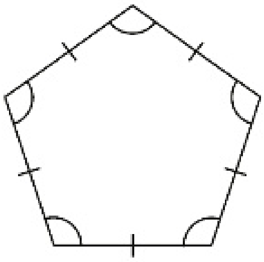
每个角相等，每个边等长的多边形称为正多边形，如图5-24所示。



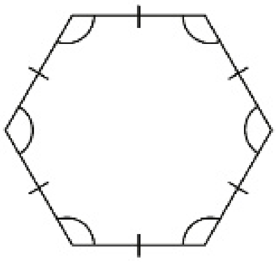
正三角形 (等边三角形)



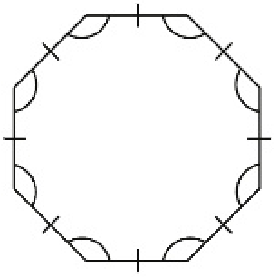
正四边形 (正方形)



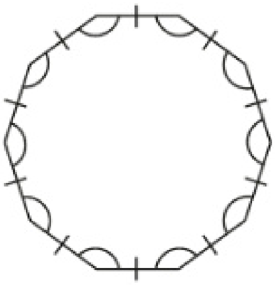
正五边形



正六边形



正八边形



正十边形

图5-24

补充资料

若一个三角形的三个角相等，则它的三个边也相等。相反的，若一个三角形的三个边相等，则它的三个角也相等。

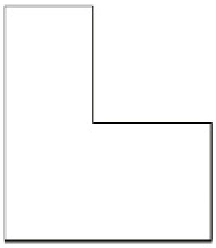
对于有四或以上个边的多边形，这两个性质却不成立。例如：长方形的四个角相等，但是它的四个边不一定相等；而菱形的四个边相等，但它的四个角不一定相等。

因此，正多边形的定义中，必须同时要有每个角相等及每个边相等这两个条件。

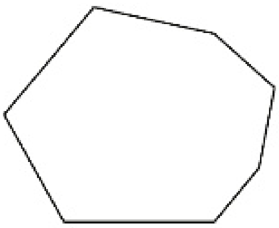
随堂练习 10

1. 下列各图中，哪些是凸多边形？哪些是凹多边形？

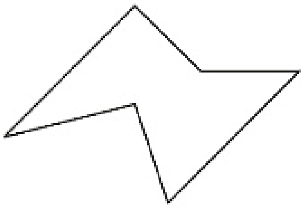
(a)



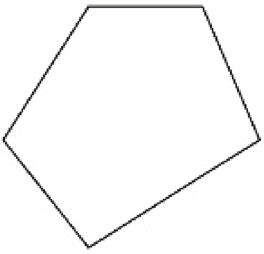
(b)



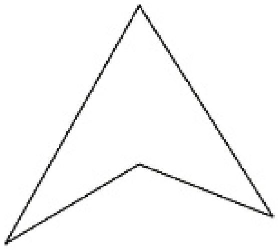
(c)



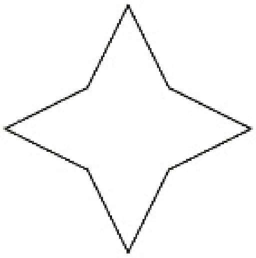
(d)



(e)

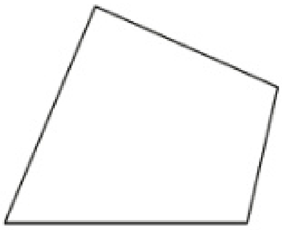


(f)

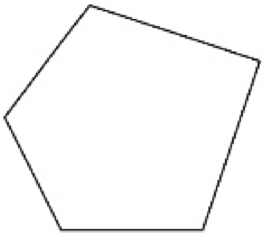


2. 作出下列各多边形所有的对角线。

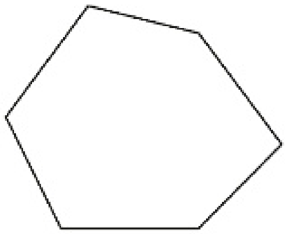
(a)



(b)



(c)



多边形的内角和

在5.1节，我们已经讨论过，四边形的其中一条对角线将四边形分成两个三角形，因此，

四边形的内角和＝两个三角形的内角和

$=2\times180^\circ$

$=360^\circ$

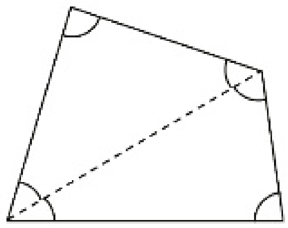
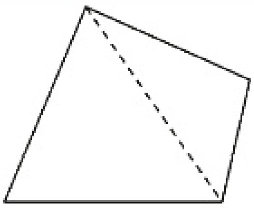
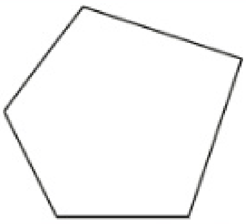
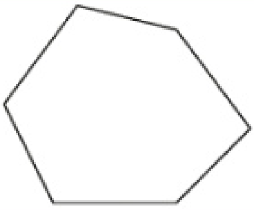
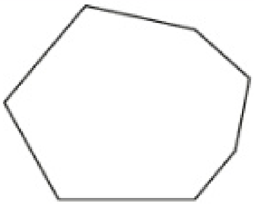
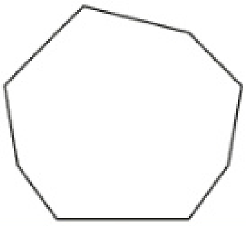
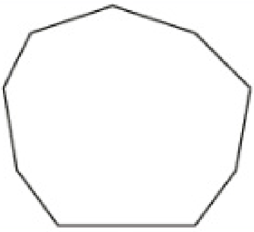
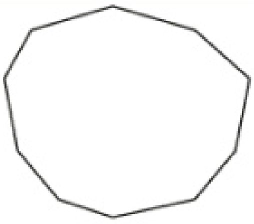


图5-25

同学们可依照上述的方法来求多边形的内角和：

多边形	边数	由一顶点作所有对角线	所形成三角形的数目	内角和
四边形	4		2	$2\times180^\circ=360^\circ$
五边形	5			

六边形	6			
七边形	7			
八边形	8			
九边形	9			
十边形	10			

由以上的结果可知，由 n 边形的其中一个顶点，一共可作 $n-3$ 条对角线，将 n 边形分成 $n-2$ 个三角形。因此，我们得到以下的结论：

一个 n 边形的内角和 $=(n-2)\times180°$



思考题

一个凸 n 边形共有几条对角线？

例题 1

已知一个多边形的内角和为1980°，求该多边形的边数。

解： 设该多边形有 n 个边。

$$(n-2)\times180^\circ=1980^\circ$$
$$n-2=11$$
$$n=13$$

∴ 该多边形有13个边。

例题 2

求正八边形每个内角的度数。

解： 正八边形的内角和 $=(8-2)\times180^\circ$

$=6\times180^\circ$

∴ 每个角的度数 $=\dfrac{6\times180^\circ}{8}$

$=135^\circ$

多边形的外角和

在第4章，我们已经证明了，一个三角形的外角和为360°。四边形又如何呢？

如图5-26所示，

$$\angle1+\angle2+\angle3+\angle4+\angle a+\angle b+\angle c+\angle d=4\times180^\circ$$

$$\therefore\quad \angle1+\angle2+\angle3+\angle4+2\times180^\circ=4\times180^\circ$$

$$\therefore\quad \angle1+\angle2+\angle3+\angle4=2\times180^\circ=360^\circ$$

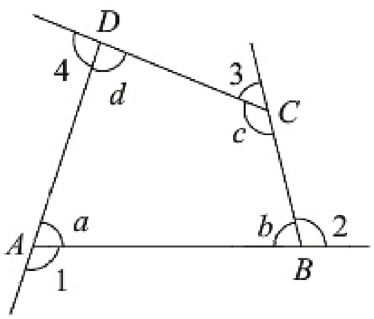


图5-26

即，我们证明了，一个凸四边形的外角和也是360°。五边形呢？

如图5-27所示，

$$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5 +\angle a+\angle b+\angle c+\angle d+\angle e=5\times 180^\circ$$

$$\therefore\quad \angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+3\times 180^\circ=5\times 180^\circ$$

$$\therefore\quad \angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5=2\times 180^\circ =360^\circ$$

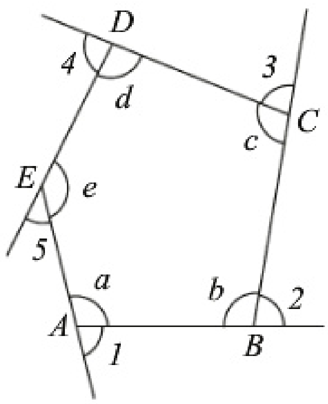


图5-27

即，我们证明了，一个凸五边形的外角和也是360°。

推广以上的证明，对于一个凸 n 边形，它的每一个外角与相邻的内角之和为180°。因此，所有的外角与所有的内角之和为 $n\times 180^\circ$。但是，我们已经知道，所有的内角之和为 $(n-2)\times 180^\circ$，因此，所有的外角之和为 $2\times 180^\circ$，即

一个凸 n 边形的外角和 $=360^\circ$

例题 3

若一个正多边形的每一个外角等于40°，求该多边形的边数。

解： 设该多边形有 n 个边。

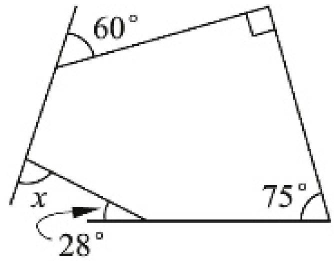
$$n\times 40^\circ=360^\circ$$

$$n=9$$

∴ 该多边形有9个边。

例题 4

右图中，求x。



解： $y=90°$

$z=180°-75°$

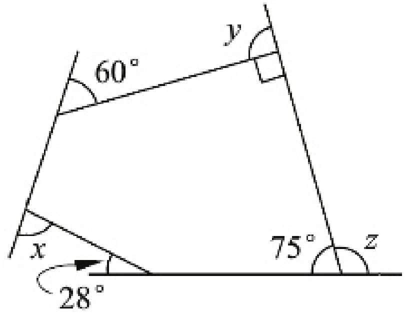
$=105°$

$x+28°+z+y+60°=360°$ （外角和）

$x+105°+90°+88°=360°$

$x+283°=360°$

$x=77°$



例题 5

一个正多边形的每个内角等于156°，求它的边数。

解： 设该多边形有n个边。

每个外角$=180°-156°$

$=24°$

$n\times 24°=360°$

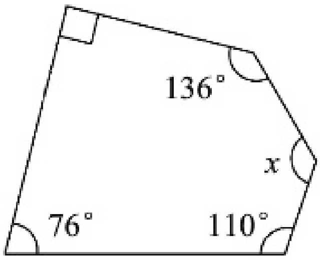
$n=15$

$\therefore$ 该多边形有15个边。

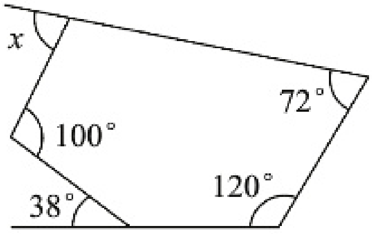
随堂练习 11

1. 下列各图中，求 x：

(a)



(b)

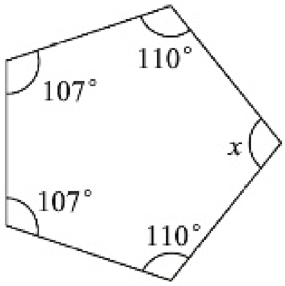


2. 求 14 边形的内角和。
3. 求正 12 边形每个内角的大小。

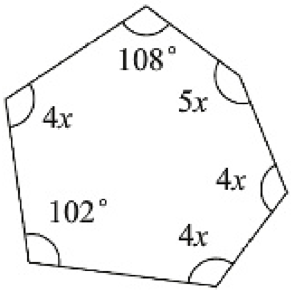
练习 5.9

1. 下列各图中，求 x 及 y：

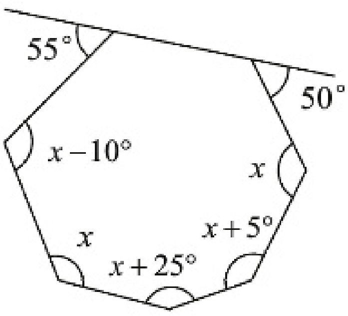
(a)



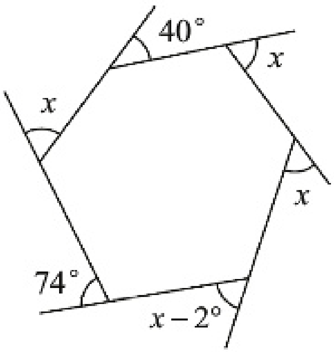
(b)



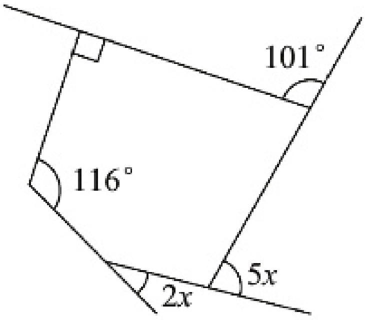
(c)



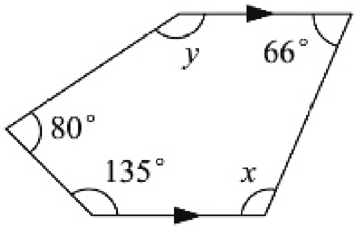
(d)



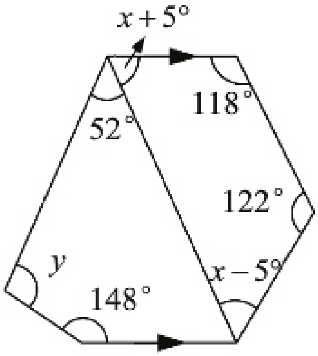
(e)



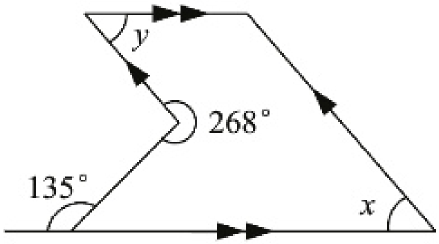
(f)



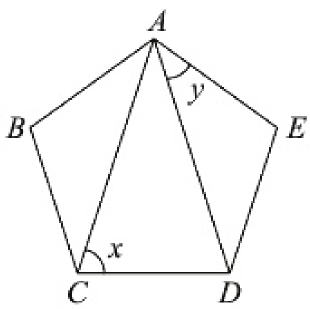
(g)



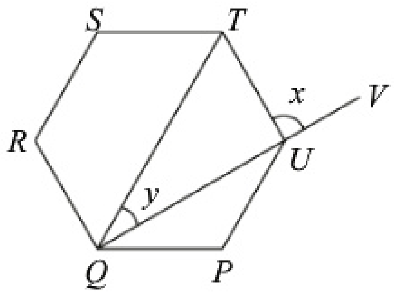
(h)



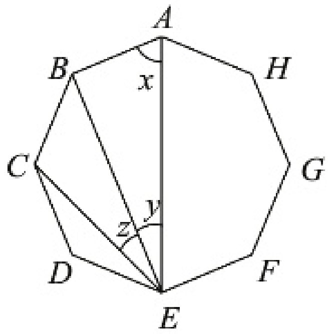
2. 求11边形的内角和。
3. 若一个多边形的内角和为2520°，求其边数。
4. 若一个多边形每一个外角都等于20°，求其边数。
5. 若一个多边形每一个内角都等于162°，求其边数。
6. 已知一个多边形，其内角和等于外角和的4倍，求这个多边形的边数。
7. 求一个正24边形每个内角的大小。
8. 已知一个多边形的每一个外角都等于45°，求这个多边形的内角和。
9. 已知一个正多边形的内角和是外角和的8倍，求这个正多边形每个内角的大小。
10. 已知一个正多边形的内角和为2340°，求这个正多边形每个内角的大小。
11. 已知一个五边形五个内角的比为2:3:4:5:6，求这个多边形最大的内角。
12. 右图中，$ABCDE$为正五边形，求x及y。



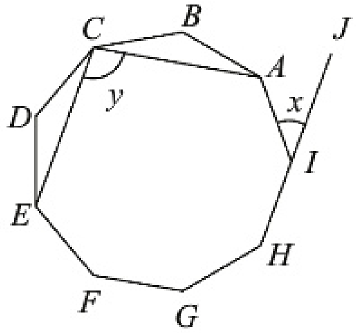
13. 右图中，$PQRSTU$为一边长为5 cm的正六边形，QUV是直线。
   (a) 求x及y；
   (b) 求QT的长。



14. 右图中，$ABCDEFGH$为一正多边形。求x，y及z。



15. 右图中，$ABCDEFGHI$为一正多边形，HIJ是直线。求x及y。

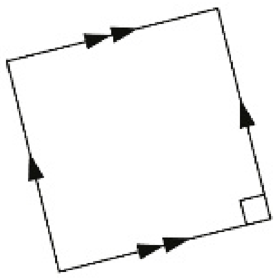


总复习题 5

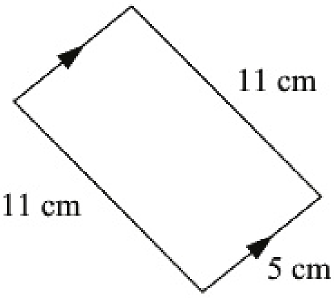
1. 是非题：
   (a) 正方形是菱形。
   (b) 菱形是长方形。
   (c) 平行四边形的对角线相等。
   (d) 长方形是平行四边形。
   (e) 对角线互相垂直且互相平分的四边形是菱形。
   (f) 对角线相等的四边形是长方形。
   (g) 对角相等的四边形是菱形。
   (h) 长方形的内角和等于360°。
   (i) 正方形的两条对角线将正方形分成4个全等的三角形。
   (j) 风筝形的其中一条对角线平分其端点的角。

2. 根据所给的条件，判断下列各图形是平行四边形，菱形，长方形，正方形，风筝形或梯形。

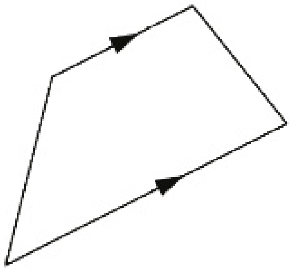
(a)



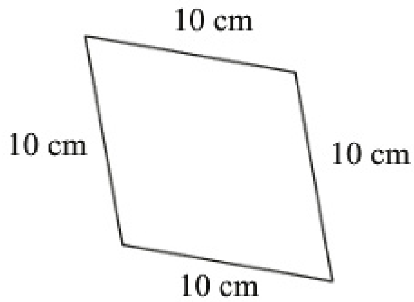
(b)



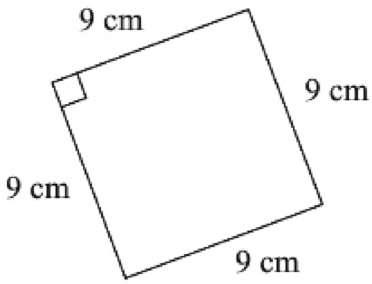
(c)



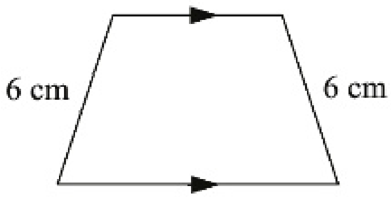
(d)



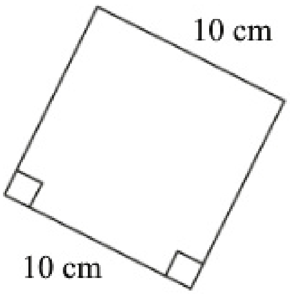
(e)



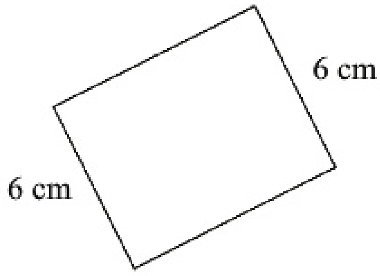
(f)



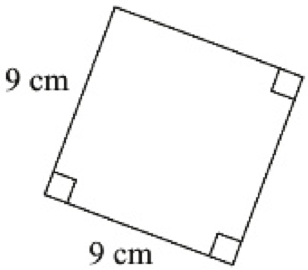
(g)



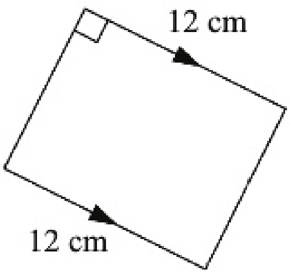
(h)



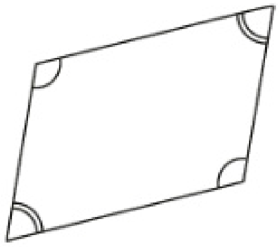
(i)



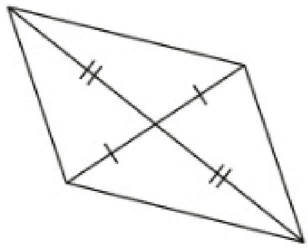
(j)



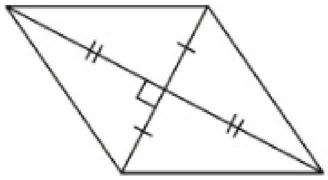
(k)



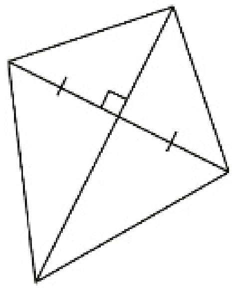
(l)



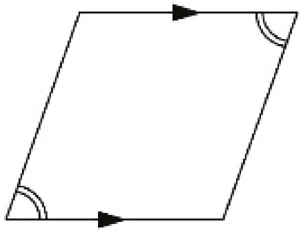
(m)



(n)

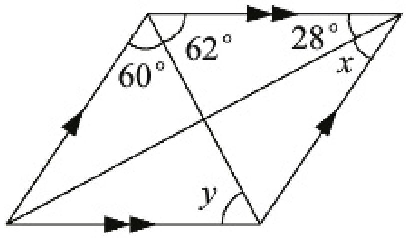


(o)

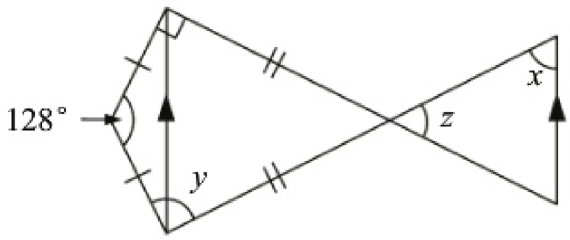


3. 下列各图中，求 x，y 及 z：

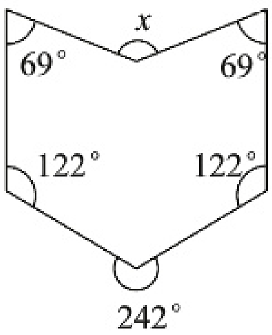
(a)



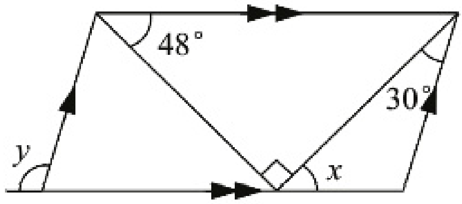
(b)



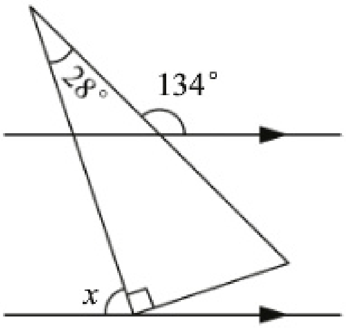
(c)



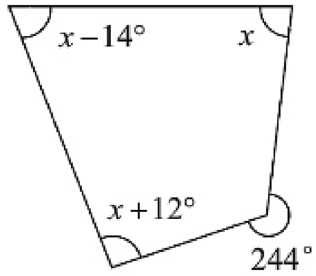
(d)



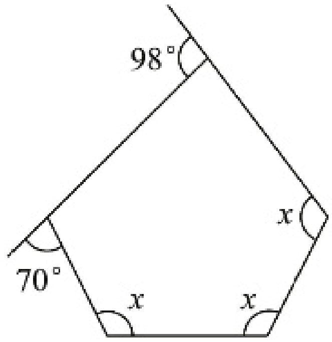
(e)



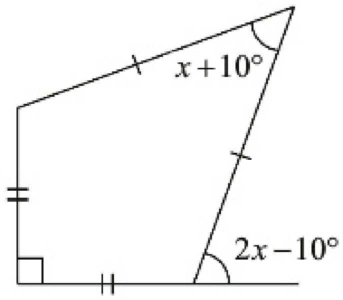
(f)



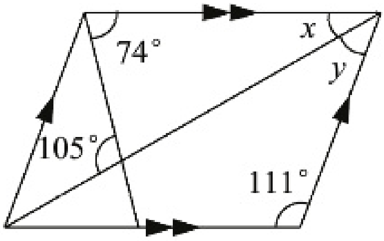
(g)



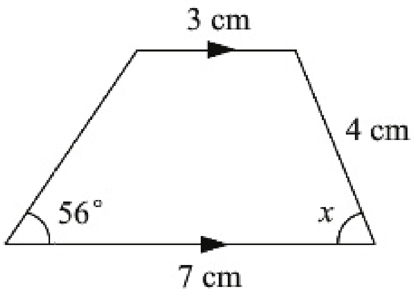
(h)



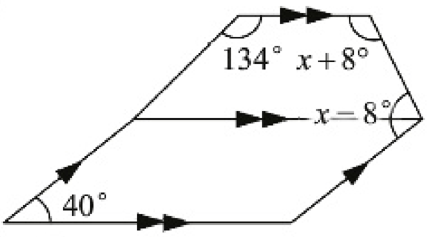
(i)



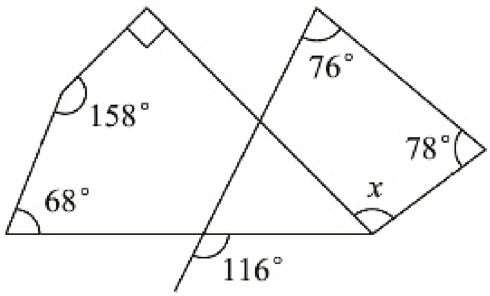
(j)



(k)

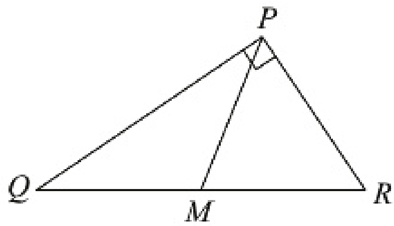


(l)

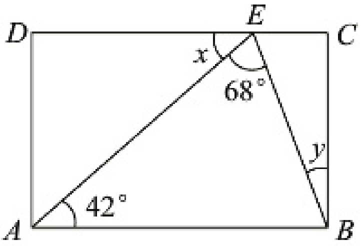


4. 求17边形的内角和。
5. 若一个正多边形的每个内角等于144°，求此正多边形的边数。
6. 若一个正多边形的内角和为6120°，求这个正多边形每个外角的大小。

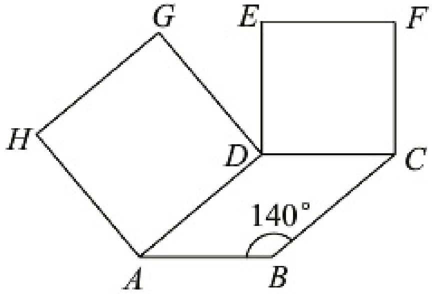
7. 右图中，ΔPQR是直角三角形，$\angle P$是直角，是M的QR中点，$PM = 6\,\text{cm}$。求QR的长。



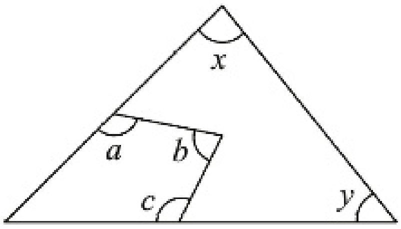
8. 右图中，$ABCD$是长方形，求x及y。



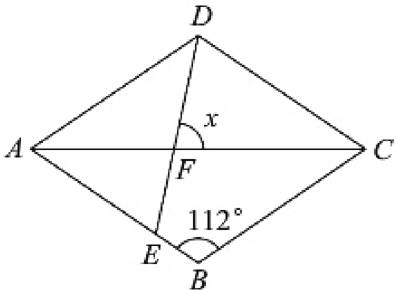
9. 右图中，$ABCD$为平行四边形，$CDEF$及$ADGH$为正方形。求$\angle EDG$。



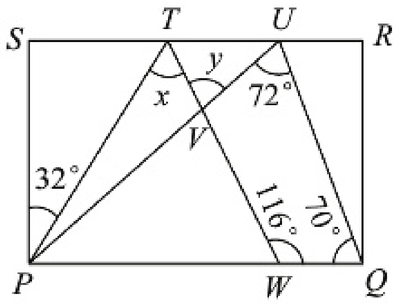
10. 右图中，求$a+b+c-x-y$。



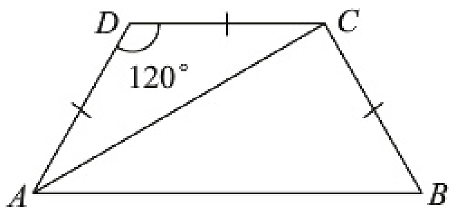
11. 右图中，$ABCD$为菱形，E是AB上的一点使得$DE = DA$，AC与DE相交于点F。求x。



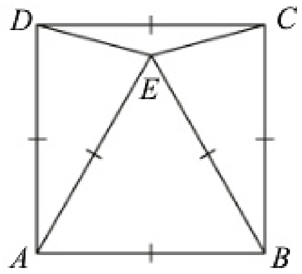
12. 右图中，$PQRS$为长方形，直线PU与TW相交于点V。求x及y。



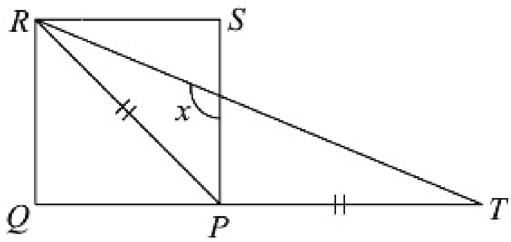
13. 如右图所示，$ABCD$是一等腰梯形。已知 $AD = DC = CB = 3\text{cm}$，$\angle ADC = 120°$，
(a) 求$\angle ACB$；
(b) 求AB的长。



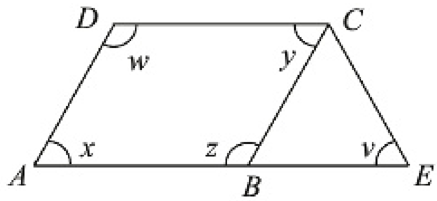
14. 右图中，$ABCD$是正方形，ΔABE是等边三角形。求$\angle CED$。



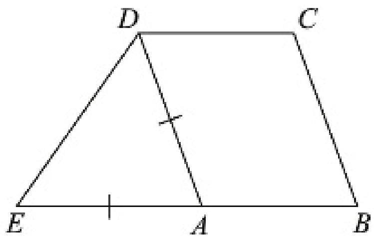
15. 右图中，$PQRS$是正方形，QPT是直线，ΔPRT是等腰三角形，$PR = PT$。求x。



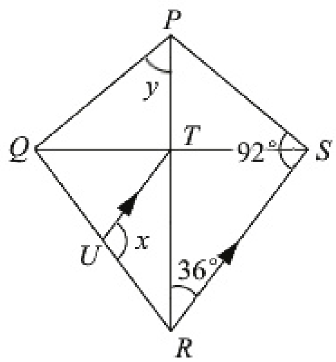
16. 右图中，ABE是直线，$ABCD$是平行四边形，ΔBCE是等边三角形。求$v + w + x + y + z$。



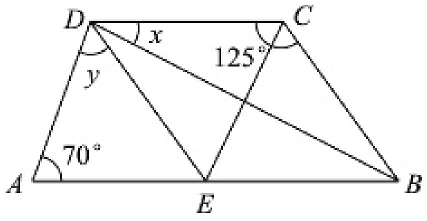
17. 右图中，EAB是直线，$ABCD$是平行四边形，ΔADE是等腰三角形。若$\angle C = 2x + 40°$，$\angle DAB = 4x - 30°$，求$\angle ADE$。



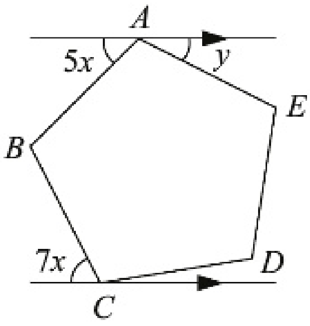
18. 右图中，$PQRS$为一风筝形，$PQ = PS$，$RQ = RS$，对角线PR与QS相交于点T，$TU // SR$。求x及y。



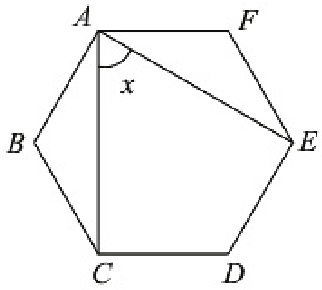
19. 右图中，$ABCD$是梯形，E是AB上的一点，$BCDE$是菱形。求x及y。



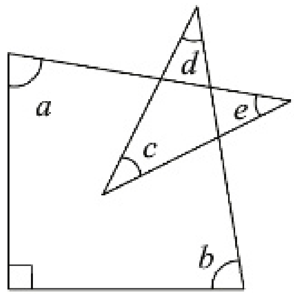
20. 右图中，$ABCDE$是正五边形。求x及y。



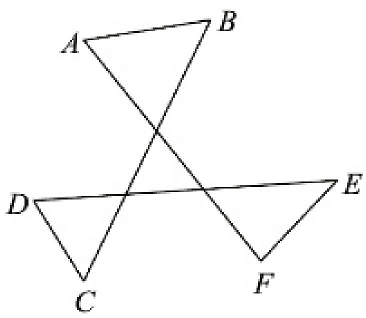
21. 右图中，$ABCDEF$为正六边形。求x。



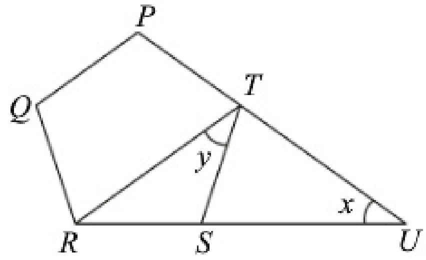
22. 右图中，求$a+b+c+d+e$。



23. 右图中，求$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F$。



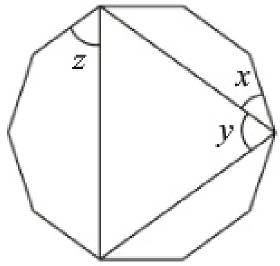
24. 右图中，$PQRST$ 是正五边形，PT 与 RS 的延长线相交于点 U。



(a) 求 x 及 y；

(b) 证明 ΔSTU 是等腰三角形。

25. 右图所示为一正多边形。求 x，y 及 z。



6 周长与面积

学习目标

- 能计算正方形、长方形、三角形、平行四边形、梯形、菱形、风筝形等平面几何图形的周长与面积
- 能应用等高三角形的面积比公式



胡先生想在他的农场四周围一道篱笆。如果篱笆的造价是每公尺RM 250，胡先生要如何估算所需要的费用?

张女士打算粉刷房子后方的一面长12公尺，高3公尺的墙。她到五金店买漆时看到4.5公升的漆桶上有如图6-1所示的说明。张女士至少需要几桶漆呢?



产品参数

漆干	15分钟
重涂刷时间	相隔一至二小时
光泽	哑光
理论覆盖面	每公升10–12平方公尺
涂层次数	2至3层

图 6-1

在数学上，我们把一个封闭平面图形的边界的总长度称为该图形的周长，而一个封闭平面图形的大小叫做该图形的面积。在上述的例子中，胡先生所面对的是测量农场周长的问题，而张女士则需要计算墙壁的面积。

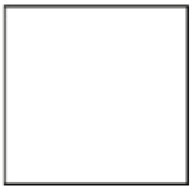
在本章中，我们将学习计算多边形的周长与面积。

6.1 周长

根据定义，计算一个封闭平面图形的周长时，我们必须先找出该图形所有的边界，然后再求这些边界长度的和。

例题 1

计算一个边长为3.5 cm的正方形的周长。



解： 正方形有四个边，每边长3.5 cm。

$\therefore$ 周长 $= 3.5 \times 4$

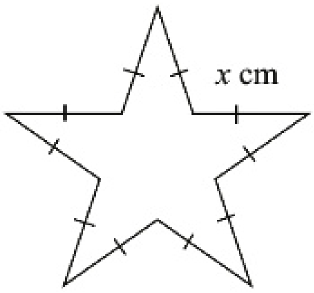
$= 14$ cm

由于正方形的四个边长相等，我们知道

正方形的周长 $= 4 \times$ 边长

例题 2

右图中，星状铁片的周长为13cm，求铁片一边的长度。



解： 由图形可知，此铁片一共有10个边。

设铁片每边的长为 x cm, 则

$$10x = 13$$

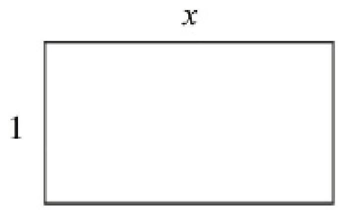
$$x = \frac{13}{10}$$

$$= 1.3$$

$\therefore$ 铁片一边的长度是1.3 cm。

例题 3

用一根长为6公尺的铜线，围成一个长方形。如果这个长方形的宽是1公尺，求长方形的长。



解： 设长方形的长为x公尺，则其周长为$2(x+1)$公尺。

$$2(x+1)=6$$
$$x+1=3$$
$$x=2$$

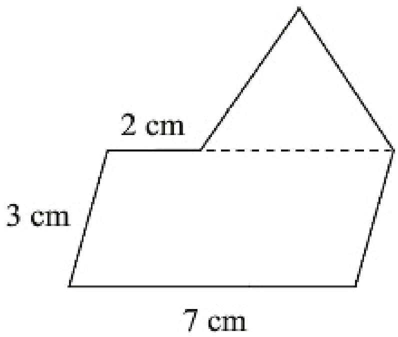
$\therefore$ 长方形的长为2公尺。

由于长方形的对边等长，我们知道

长方形的周长＝2×(长+宽)

例题 4

右图是由一个等边三角形及一个平行四边形所构成的图形，求其周长。



解： 等边三角形的边长＝7−2＝5 cm。

图形的周长＝3+7+3+5+5+2

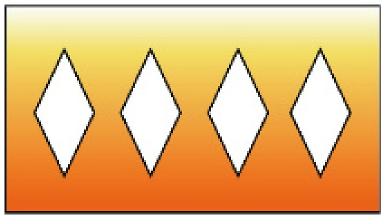
＝25 cm



当两个图形拼合时，原图形某部分的边界有可能不再是拼合后图形的边界，如上图中虚线的部分。

例题 5

张师傅从一块长30 cm，宽20 cm的长方形锡片中切掉四个边长都是5 cm的菱形，如右图所示。问剩余部分的周长是多少？



解： 所剩余的锡片的边界是由长方形及四个菱形的边界共同组成。

$\therefore$ 所求的周长 $= 2\times(20+30)+4\times(4\times5)$

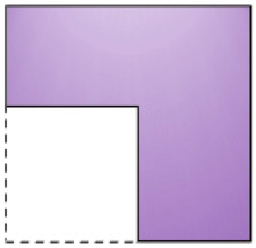
$= 180\text{ cm}$

注意

虽然切掉菱形部分，但是锡片边界的长度却增加了。

随堂练习 1

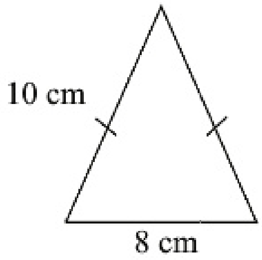
1. 若一个正五多边形每边长7 cm，求其周长。
2. 一长方形的长比宽多2 cm且其周长为44 cm。求此长方形的长。
3. 从一个边长为8 cm的正方形卡纸剪去一个边长为5 cm的正方形，如右图所示。求剩余卡纸的周长。



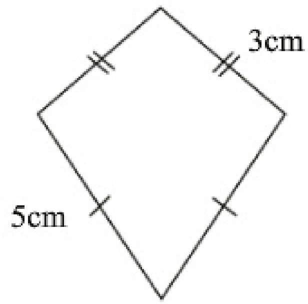
练习 6.1

1. 计算下列各图形的周长。

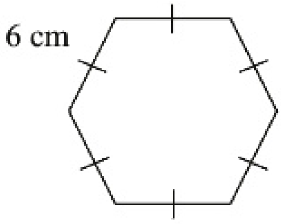
(a)



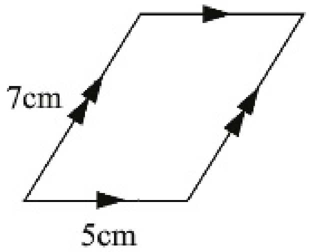
(b)



(c)



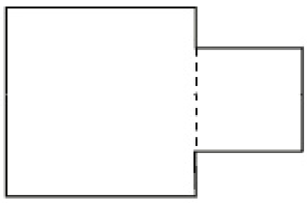
(d)



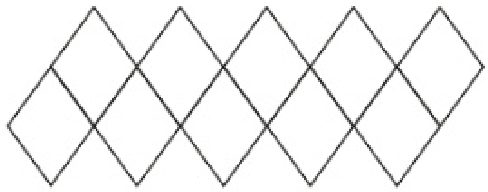
2. 中国传统吉祥物八卦镜的形状为正八边形。一个八卦镜的边长为12 cm，求此八卦镜(平面)的周长。



3. 一条长 64 cm 的铁线围成一个正方形，问此正方形的边长是多少?
4. 若一个正多边形有 n 个边，每边长 x cm 。求此多边形的周长。
5. 一个正多边形有 n 个边且其周长为 y cm 。求此多边形的边长。
6. 一个等腰三角形的周长是 50 cm，底边长 24 cm，它的腰长是多少?
7. 有一个长 45 m，宽 35 m 的长方形果园，其 $\frac{3}{8}$ 的篱笆被摧毁，若要修补，问需多长的铁丝网?
8. 右图是由两个边长分别为 6 cm 及 4 cm 的正方形所组成，求其周长。



9. 右图是由10个边长为8 cm的菱形所组成，求此图形的周长。



10. 美国的国防部总部是一栋边长为280.7公尺的正五边形大楼。问大楼底面的周长是多少公尺？如果以每秒0.5公尺的速度绕大楼一周，需要多少时间？

11. 从一个边长为8 cm的正方形卡纸剪去一个边长为5 cm的正方形，所剩余部分的周长
    (a) 最小可能是多少？
    (b) 最大可能是多少？
    (c) 有没有可能剪出周长介于最大值与最小值之间的形状？
    试绘出上述各种情况所得的形状。

6.2 面积

面积是一个封闭平面图形的大小，那么要如何测量这个量呢？

正方形的面积

若一个正方形的边长是一个单位，我们定义它的面积为一个平方单位。如图6-2所示的正方形，它的边长为1公分，其面积就是一个平方公分(cm^2)。同理，如果一个正方形的边长为1公尺，其面积就是一个平方公尺(m^2)。

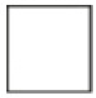


图6-2

例题 1

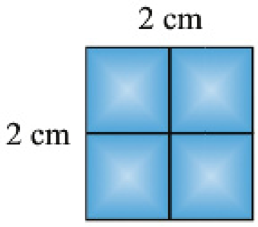
求边长为 (a) 2 cm；

(b) 3 cm

的正方形的面积。

解： (a) 边长为 2 cm 的正方形是由 4 个边长为 1 cm 的正方形所组成。所以其面积为 $4\times 1\ \text{cm}^2 = 4\ \text{cm}^2$。

我们注意到，$4\ \text{cm}^2 = 2\ \text{cm}\times 2\ \text{cm}$



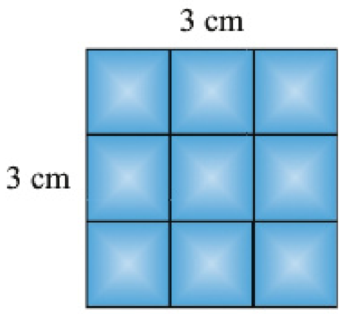
补充资料

单位×单位= 平方单位

如：$\text{cm}\times\text{cm}=\text{cm}^2$

(b) 边长为3 cm的正方形，是由9个边长为1 cm 的正方形所组成。所以其面积为 $9\ \text{cm}^2$。

我们注意到，$9\ \text{cm}^2 = 3\ \text{cm}\times 3\ \text{cm}$



由例题1，我们知道

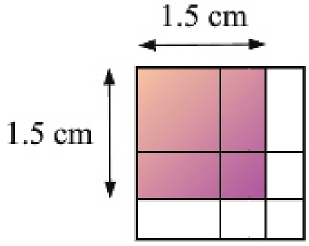
正方形的面积 = $(\text{边长})^2$

例题 2

求边长为1.5 cm的正方形的面积。

解： 面积 $= 1.5\ \text{cm} \times 1.5\ \text{cm}$

$= 2.25\ \text{cm}^2$



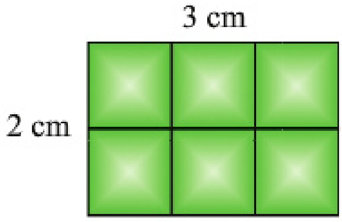
长方形的面积

例题 3

求长3 cm，宽2 cm的长方形的面积。

解： 如右图所示，此长方形是由六个边长为1 cm的正方形所组成，所以面积为6 cm^2。

我们注意到，$6\ \text{cm}^2 = 3\ \text{cm} \times 2\ \text{cm}$。

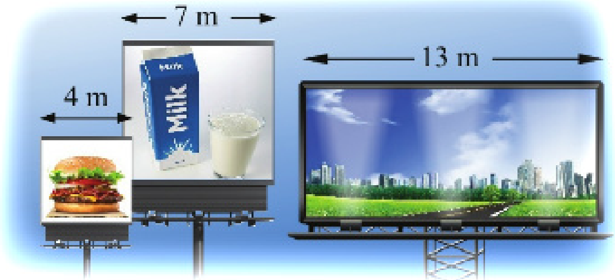


由例题3可得

长方形的面积＝长×宽

例题 4

为了增强广告效果，某公司决定用一个长为13 m的长方形广告板以取代两个边长分别为7 m及4 m的正方形广告板。如果要求长方形广告板的面积必须等于原有两个正方形广告板的面积之和，求长方形广告板的宽。



解： 两个正方形广告板的面积之和 $= 7^2 + 4^2$

$= 65\ \text{m}^2$

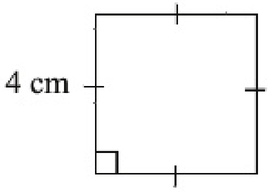
长方形广告板的宽 $= 65 \div 13$

$= 5\ \text{m}$

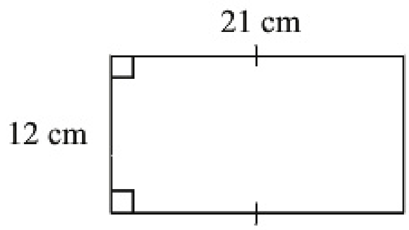
随堂练习 2

1. 求下列图形的面积。

(a)



(b)



2. 求边长为 13 cm 的正方形的面积。
3. 求长 6 m，宽 2 m 的长方形的面积。

练习 6.2a

1. 完成下列各表。

(a) 正方形

边长	面积	周长
6 mm		
	16 cm^2	
		28 m

(b) 长方形

长	宽	面积	周长
3 cm	7 cm		
	4 cm	36 cm^2	
7 m			20 m

2. 一条长2 m的铁线围成一个正方形，求此正方形的面积。
3. 一长方形玻璃片的面积是180 cm^2，若它的长是15 cm，求它的宽。
4. 用一根铁线可围成一个长16 cm，宽12 cm的长方形。如果把它改成正方形，问正方形的面积是多少？这两个图形的面积相等吗？
5. 一个正方形的面积为64 cm^2，求它的周长。
6. 一个正方形的边长为12 cm，一个长方形的长为18 cm，若它们的面积相等，求长方形的宽。
7. 一地板长5.4 m，宽4.5 m，问铺满此地板，需用多少块边长15 cm的正方形磁砖？
8. 一个长方形长15公分，宽10公分。如果它的长增加了20%，其面积增加多少巴仙？
9. 一个正方形的边长为12公分。若其边长增加了20%，其面积增加多少巴仙？
10. 张女士打算粉刷房子后方的一面长12公尺，高3公尺的墙。她到五金店买漆时，看到4.5公升的漆桶上注明每桶的漆可以覆盖12平方公尺的面积。张女士需要几桶漆？

三角形的面积

在推导三角形的面积公式时，我们分别考虑三种情况：直角三角形，锐角三角形和钝角三角形。

图 6-3 (a) 所示是一个直角三角形 ABC，它是一个长方形的一半，其面积为原来长方形面积的一半，即 $\frac{1}{2}\times b\times h$。

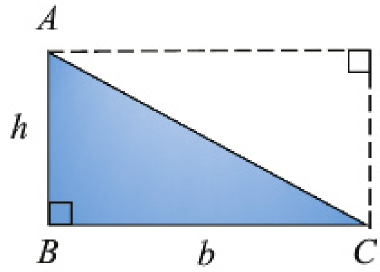


图 6-3 (a)

在图 6-3 (b) 的锐角三角形 ABC 中，BC 是底边。由图中可以看出，这个三角形的面积是以 BC 为长，AD 为宽的长方形的面积的一半，即 $\frac{1}{2}\times BC\times h$。

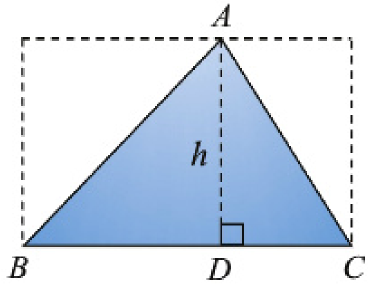


图 6-3 (b)

如图 6-3(c) 所示，在三角形 ABC 中，角 C 为钝角。从 A 作垂线到 BC 的延长线可得三角形 ABD。

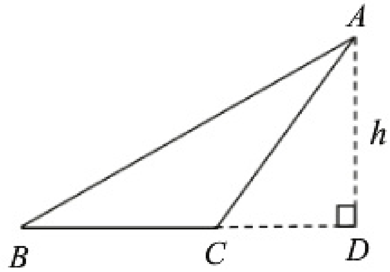


图 6-3 (c)

$$
\begin{aligned}
\Delta ABC\text{ 的面积} &= \Delta ABD\text{ 的面积} - \Delta ACD\text{ 的面积}\\
&= \frac{1}{2}\times BD\times h - \frac{1}{2}\times CD\times h\\
&= \frac{1}{2}\times(BD-CD)\times h\\
&= \frac{1}{2}\times BC\times h
\end{aligned}
$$

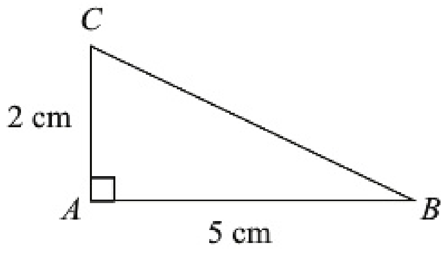
综合以上所讨论，我们知道

> 三角形的面积 $=\frac{1}{2}\times$ 底 $\times$ 高

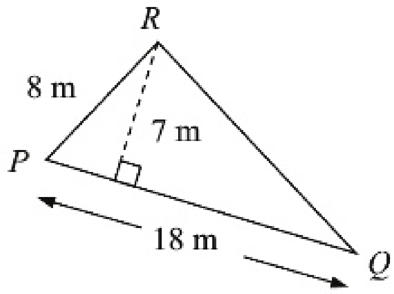
例题 5

求下列各三角形的面积。

(a)



(b)



解： (a) ΔABC 的面积 $=\dfrac{1}{2}\times 5\text{ cm}\times 2\text{ cm}$

$=5\text{ cm}^2$

(b) ΔPQR 的面积 $=\dfrac{1}{2}\times 18\text{ m}\times 7\text{ m}$

$=63\text{ m}^2$

例题 6

一个三角形的面积为 50 cm^2。若其底边长 5 cm，求它的高。

解： 设其高为 h cm。

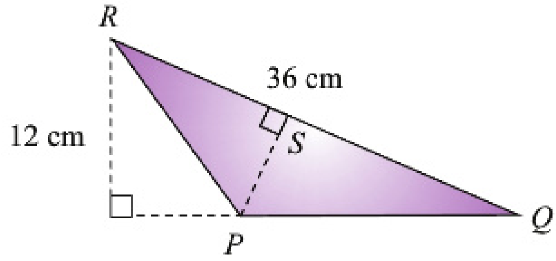
$$\frac{1}{2}\times 5\times h=50$$

$$h=20$$

$\therefore$ 它的高为 20 cm。

例题 7

右图中，ΔPQR 的面积为 180 cm^2，求 PS 及 PQ 的长度。



解： 以 QR 为底，ΔPQR 的面积 $= \frac{1}{2} \times 36 \times PS = 180$

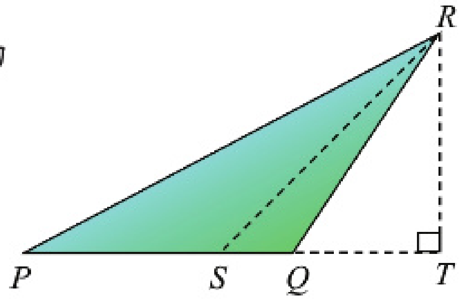
$$PS = \frac{180}{18}$$
$$= 10\text{ cm}$$

以 PQ 为底，ΔPQR 的面积 $= \frac{1}{2} \times 12 \times PQ = 180$

$$PQ = \frac{180}{6}$$
$$= 30\text{ cm}$$

例题 8

在右图中，S 为 PQ 上的一点使得 $PS = 3QS$。若 ΔPRS 的面积为 18 cm^2，求 ΔQRS 的面积。



解： ΔPRS 与 ΔQRS 有共同的高 RT。

已知 $PS = 3QS$，即 $\frac{PS}{QS} = 3$ 。

$$\therefore \quad \frac{\Delta PRS \text{ 的面积}}{\Delta QRS \text{ 的面积}} = \frac{\frac{1}{2} \times PS \times RT}{\frac{1}{2} \times QS \times RT} = \frac{PS}{QS} = 3$$

$$\frac{18}{\Delta QRS \text{ 的面积}} = 3$$

$$\Delta QRS \text{ 的面积} = 6\text{ cm}^2$$

有相等的高的三角形称为等高三角形，如例题 8 中的 ΔPRS 及 ΔQRS 就是等高三角形，它们有相等的高 RT。由例题 8 我们观察到

等高三角形的面积之比等于它们的底边之比

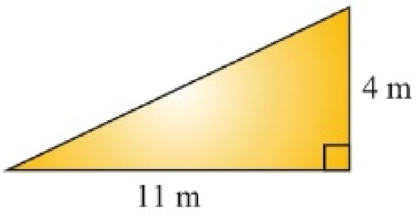
思考题

在例题8中，还有哪个三角形与 ΔPRS 等高?

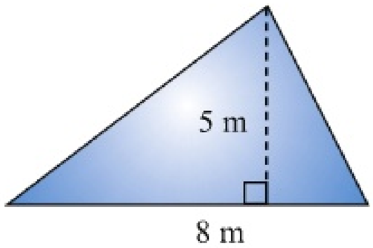
随堂练习 3

1. 求下列各三角形的面积。

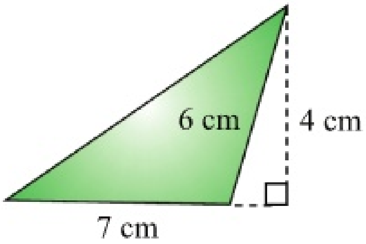
(a)



(b)



(c)

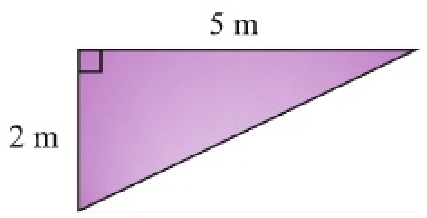


2. 已知一直角三角形的面积为 25 cm^2，且高为 10 cm，求此三角形底边的长。

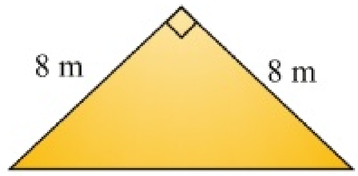
练习 6.2b

1. 求下列各三角形的面积。

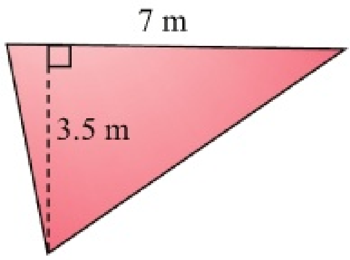
(a)



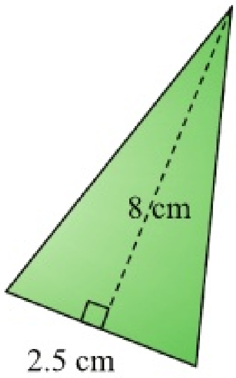
(b)



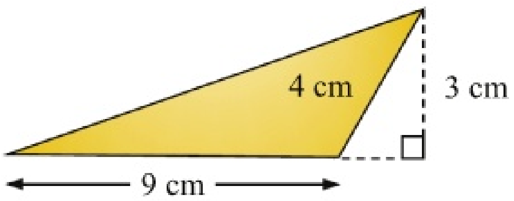
(b)



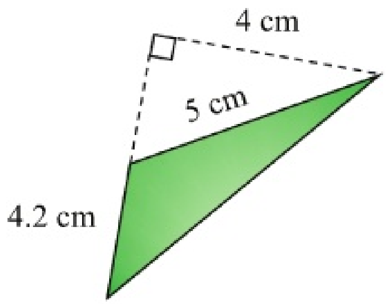
(d)



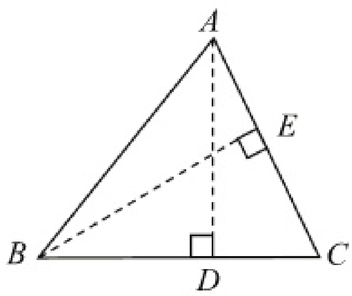
(e)



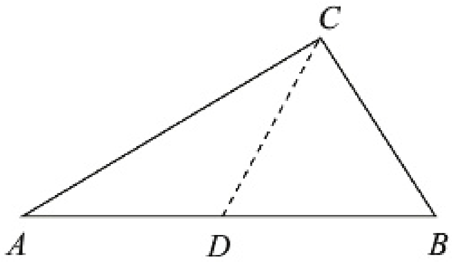
(f)



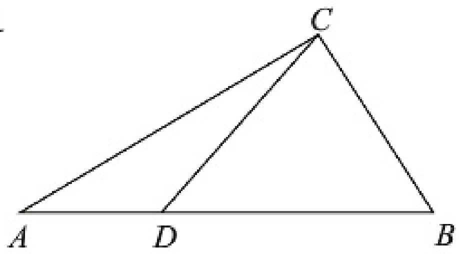
2. 右图中，ΔABC 的面积为 $80\ \text{cm}^2$，AC 与 BC 分别长 12 cm 及 15 cm。求 AD 及 BE 的长。



3. 如右图所示，D 为 AB 的中点。若 ΔADC 的面积为 $12\ cm^2$，求 ΔABC 的面积。

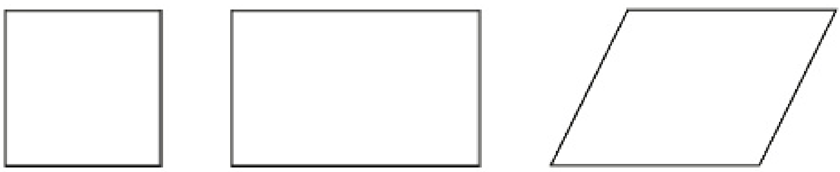


4. 右图中，D 为 AB 上一点，ΔACD 与 ΔABC 的面积之比为 $2:5$，求 $AD:DB$。



平行四边形的面积

正方形和长方形都是平行四边形的特例，它们的面积都等于两条邻边的积，也可以看作是它们的底边乘上它们的高。平行四边形是否有类似的面积公式呢?



我们可以把一个平行四边形的任何一边当作底边，把底边到对边的距离叫作高。如图 6-4 所示，如果我们把 AB 当作底边，则 DE 是高。如果我们把 BC 当作底边，则 DF 是它的高。

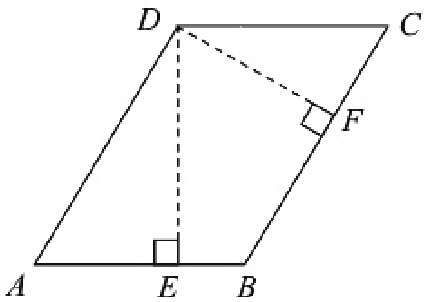


图 6-4

平行四边形的对角线会将它平分成两个全等的三角形，如图 6-5 所示。

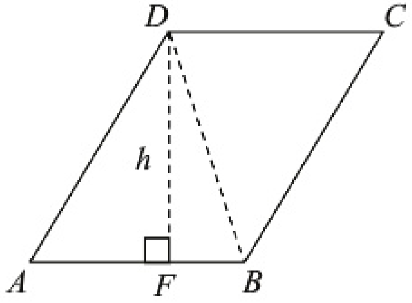


图 6-5

平行四边形 $ABCD$ 的面积 $= 2\times\Delta ADB$ 的面积

$$= 2\times\frac{1}{2}\times AB\times h$$

$$= AB\times h$$

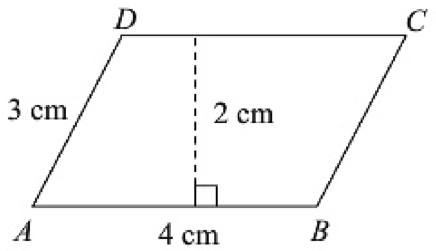
因此可得，

> 平行四边形的面积 = 底×高

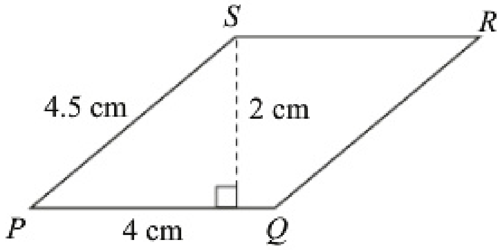
例题 9

计算下列各平行四边形的面积。

(a)



(b)



解： (a) 在平行四边形 $ABCD$ 中，以 AB 边为底，高为 2 cm。

$\therefore$ 面积 $= 4\text{ cm}\times 2\text{ cm} = 8\text{ cm}^2$。

(b) 在平行四边形 $PQRS$ 中，以 PQ 边为底，高是 2 cm。

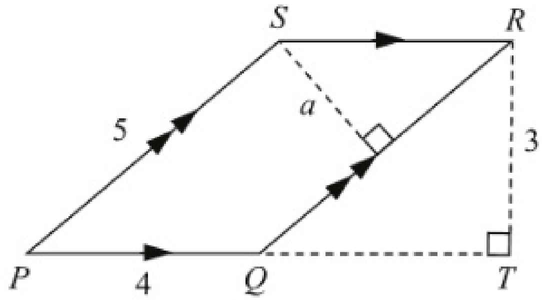
$\therefore$ 面积 $= 4\text{ cm}\times 2\text{ cm} = 8\text{ cm}^2$。

注意

从例题 9 可以看出，一个平行四边形的面积只由它的底边及高所决定，与侧边(如图中的 AD 与 PS)的长度无关。

例题 10

如右图所示，求a。



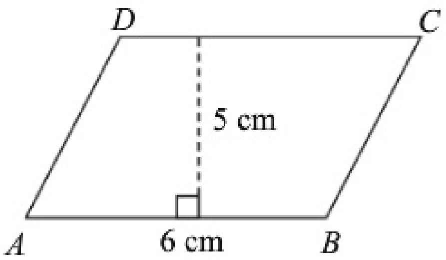
解： 平行四边形 $PQRS$ 的面积 $= 5 \times a = 4 \times 3$

$$a = \frac{12}{5}$$
$$= 2.4$$

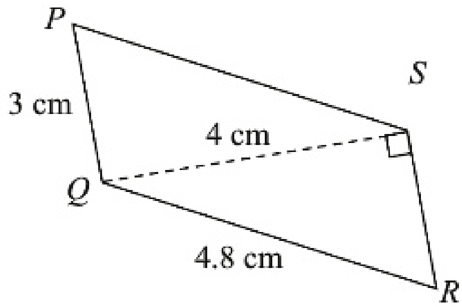
随堂练习 4

1. 求下列各平行四边形的面积。

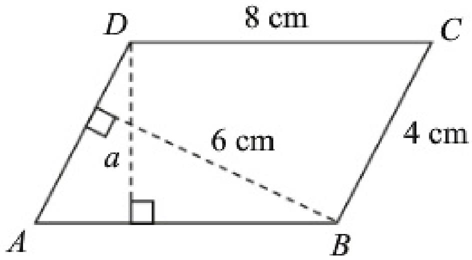
(a)



(b)



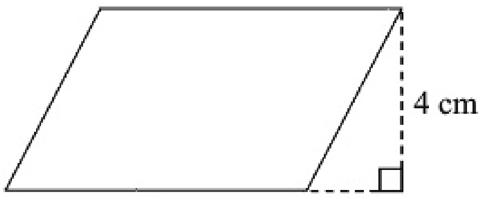
2. 右图中，$ABCD$ 是平行四边形，求a。



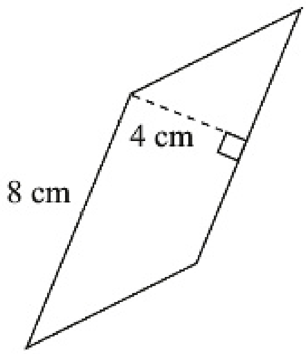
练习 6.2c

1. 求下列各平行四边形的面积。

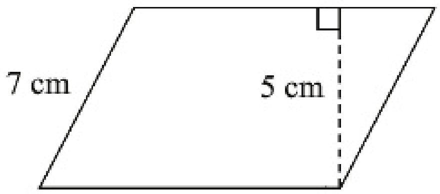
(a)



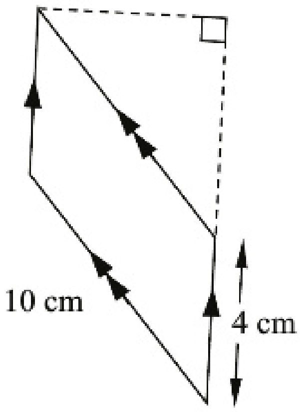
(b)



(c)

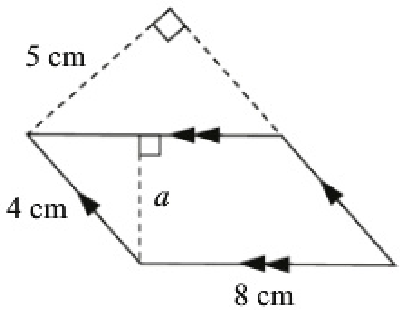


(d)

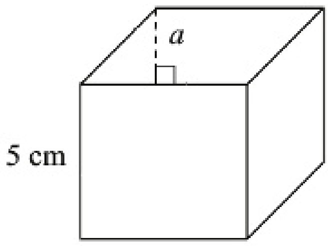


2. 一平行四边形的面积为180 m^2。若高为15 m，求底边的长。

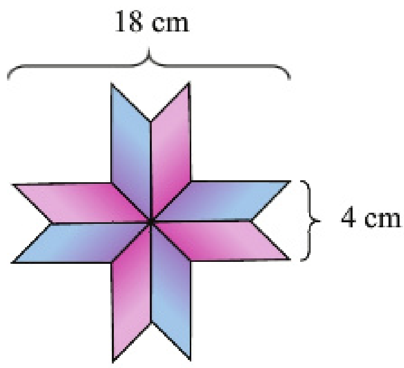
3. 在右图的平行四边形中，求 a。



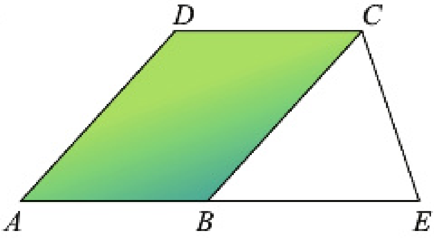
4. 右图是由两个全等的平行四边形及一个正方形所组成。若其面积为55 cm^2，求 a。



5. 右图是由八个全等的平行四边形所组成，求它的面积。



6. 右图是由一个平行四边形及一个三角形所构成。已知 ABE 为一直线，$AB=BE$ 且 ΔBCE 的面积 $=12\ \text{cm}^2$，求平行四边形 $ABCD$ 的面积。



菱形与风筝形的面积

从图6-6可以看出，风筝形 $ABCD$ 的面积是长方形的一半，因此可得

$$风筝形的面积=\frac{1}{2}\times BD\times AC$$

即

$$风筝形的面积=\frac{1}{2}\times 对角线的乘积$$

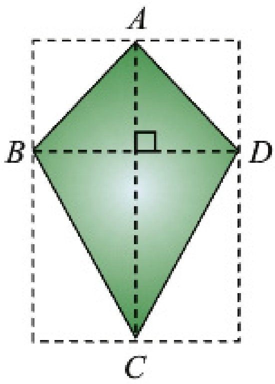


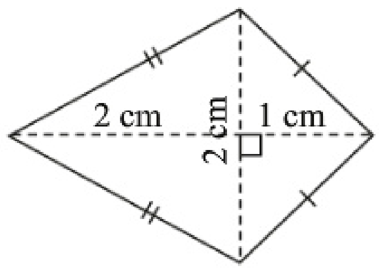
图6-6

由于菱形为风筝形的特例，所以也可得

$$菱形的面积=\frac{1}{2}\times 对角线的乘积$$

例题 11

求右图的面积。

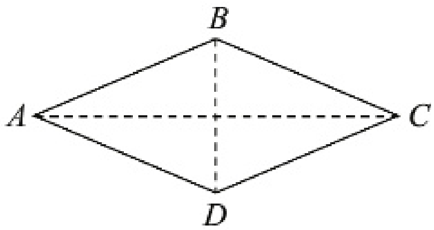


解： 此图形是一风筝形。

$$面积 = \frac{1}{2} \times 2 \times (1+2)$$
$$= 3\ cm^2$$

例题 12

右图中，$ABCD$是菱形，$AC = 8$ cm，$BD = 4$ cm，求菱形的面积。

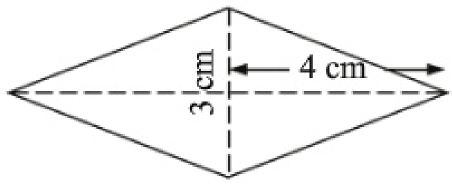


解： AC与BD为菱形$ABCD$的两条对角线。

$$面积 = \frac{1}{2} \times 8 \times 4$$
$$= 16\ cm^2$$

随堂练习 5

1. 计算右图中菱形的面积。



2. 一风筝形的面积是80 cm^2，其中一条对角线长10 cm，求另一条对角线的长。

梯形的面积

图6-7所示，$ABCD$是梯形，$AB//CD$，对角线BD将梯形分割成两个三角形。ΔBCD的高为h。以AB为底，ΔABD的高也是h。

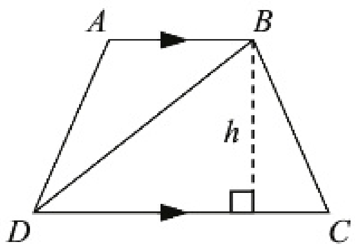


图6-7

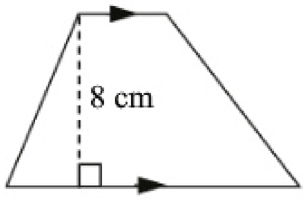
$$\begin{aligned}\text{梯形的面积} &= \Delta ABD\text{的面积}+\Delta BCD\text{的面积}\\ &= \frac{1}{2}\times AB\times h+\frac{1}{2}\times CD\times h\\ &= \frac{1}{2}\times(AB+CD)\times h\end{aligned}$$

由此可得，

$$\text{梯形的面积}=\frac{1}{2}[(\text{上底}+\text{下底})\times\text{高}]$$

例题 13

求右图中梯形的面积。

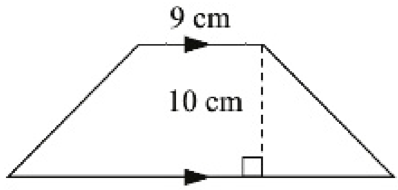


解： $\text{面积}=\frac{1}{2}\times(5+15)\times 8$

$= 80\text{ cm}^2$

例题 14

一梯形的面积是175 cm^2，其高为10 cm。若它的一个底是9 cm，求它另一个底的长。



解： 设它的另一个底长 x cm。

$$\frac{1}{2}\times(9+x)\times 10=175$$

$$9+x=35$$

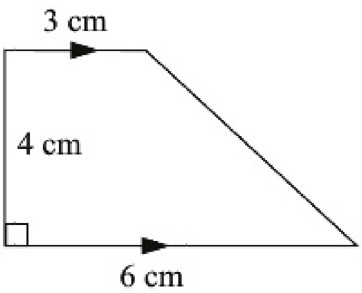
$$x=26$$

$\therefore$ 另一个底长 26 cm。

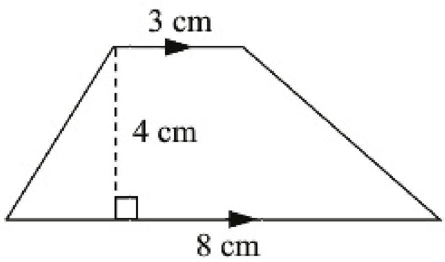
随堂练习 6

1. 求下列各梯形的面积。

(a)

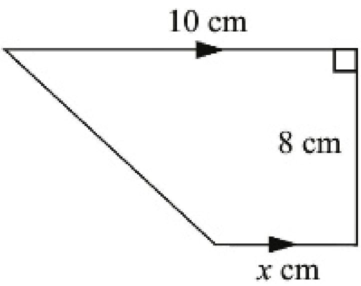


(b)



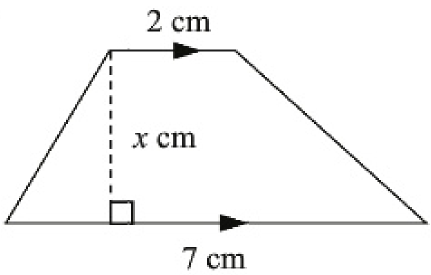
2. 下列各图中，求 x。

(a)



面积 = 48 cm^2

(b)

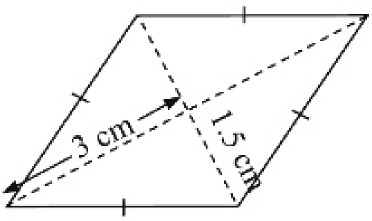


面积 = 18 cm^2

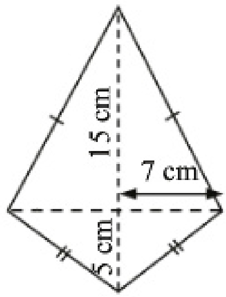
练习 6.2d

1. 求下列各图形的面积。

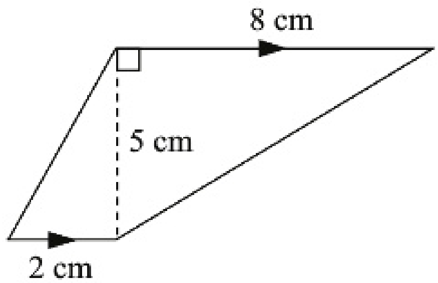
(a)



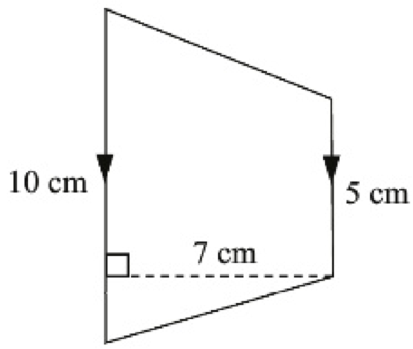
(b)



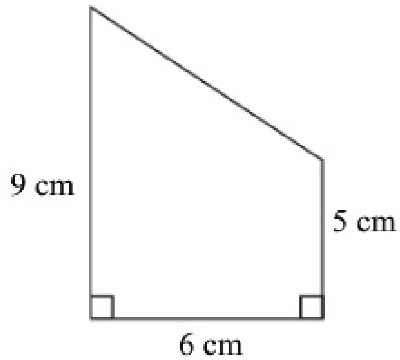
(c)



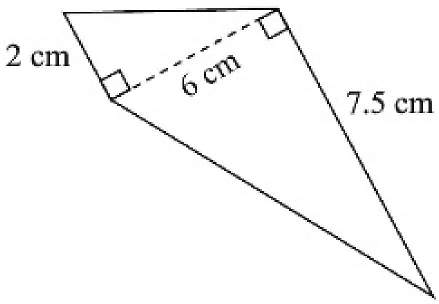
(d)



(e)



(f)



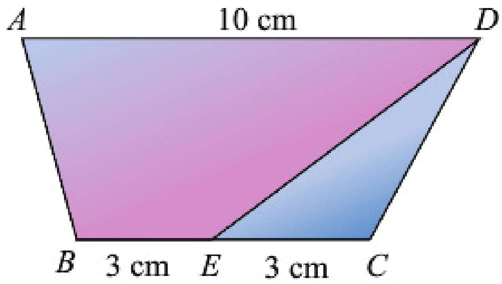
2. 在菱形 $ABCD$ 中，$AC = 4$ cm，$BD = 10$ cm。求菱形的面积。

3. 求对角线之长为 10 cm 的正方形的面积。它的面积是边长为 10 cm 的正方形的面积的百分之多少？

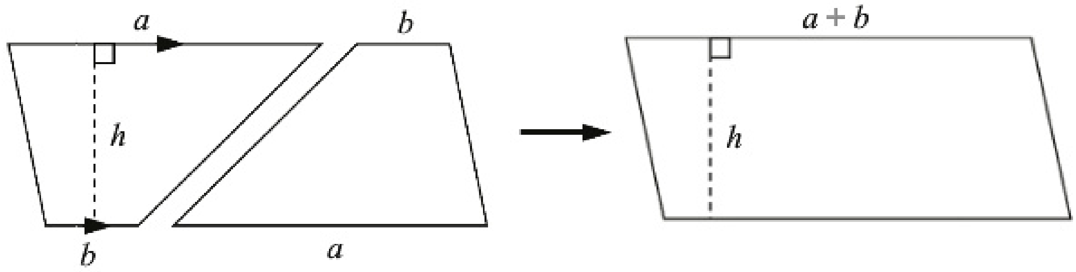
4. 在风筝形 $ABCD$ 中，$AC = 8$ cm，$BD = 4$ cm，求其面积。

5. 一梯形的面积为 36 m^2，它的一个底长 7 m，高 6 m，求另一底的长。

6. 右图中，直线BEC与直线AD平行，ΔCDE的面积是6 cm^2，求梯形$ABED$的面积。



7. 根据下图并利用平行四边形的面积公式，证明梯形的面积公式。



6.3 面积单位的换算

在长度的单位中，1 cm = 10 mm；那么1 cm^2 等于多少mm^2呢？也就是说，右边1 cm^2 大小的正方形，要几个1 mm^2 大小的正方形才能铺满？

从图6-8我们可以看出，要铺满1 cm^2 大小的正方形，需要100个1 mm^2 大小的正方形，即1 cm^2 = 100 mm^2。我们可以作以下的运算。

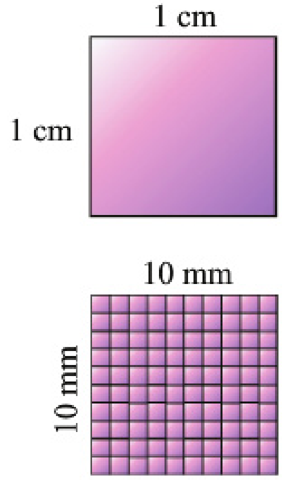


图6-8

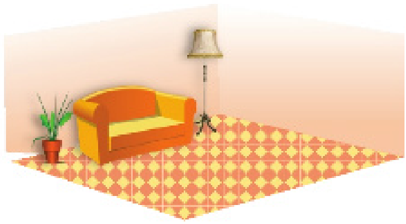
$$\begin{aligned}1\ cm^2 &= 1\ cm \times 1\ cm\\ &= 10\ mm \times 10\ mm\\ &= 100\ mm^2\end{aligned}$$

同理，

$$\begin{aligned}1\ m^2 &= 1\ m \times 1\ m\\ &= 100\ cm \times 100\ cm\\ &= 10000\ cm^2\end{aligned}$$

例题 1

一房间的地面是一个边长为3 m的正方形，若边长为50 cm的正方形云石的价格为RM30，要将此房间的地面铺上云石需多少钱?



解一： 房间地板的面积

$= 3 \times 3$

$= 9\ m^2$

$= 90000\ cm^2 \quad (1\ m^2 = 10000\ cm^2)$

每块云石的面积 $= 50 \times 50$

$= 2500\ cm^2$

$90000 \div 2500 = 36$

铺上云石需 $30 \times 36 =$ RM1080

解二： 房间地板的面积 $= 3 \times 3$

$= 9\ m^2$

每块云石的面积 $= 0.5 \times 0.5$

$= 0.25\ m^2$

$9 \div 0.25 = 36$

铺上云石需 $30 \times 36 =$ RM1080

例题 2

在土地的测量上，其中一个常用的面积单位是公顷。一公顷相等于10000 m^2。若一片油棕园的面积为5.8公顷，以每1 m^2的土地值RM50来计算，这片油棕园值多少钱?



解： 5.8 公顷 = 5.8×10000

= 58000 m^2

这片油棕园的价值为 58000×50 = RM2900000

随堂练习 7

1. 一平方公里有多少平方公尺？一平方公里相等于几公顷?
2. 如果要表示以下的面积，一般上使用哪个单位较为恰当？(cm^2，m^2，km^2 或公顷)
   (a) 马来西亚
   (b) A4 纸
   (c) 橡胶园
   (d) 教室的地面

练习 6.3

1. 完成下表：

	cm^2	m^2	km^2
(a)		200	
(b)			0.05

2. 一张被单长2.5 m，宽1.5 m。以 (a) m^2；(b) cm^2 为单位，求此被单的面积。
3. 已知一公尺约为3.3英尺，以下哪个尺寸的面积最接近一平方公尺？
   注：2'代表2英尺

尺寸	3'×3'	3'×4'	2'×5'	2'×6'

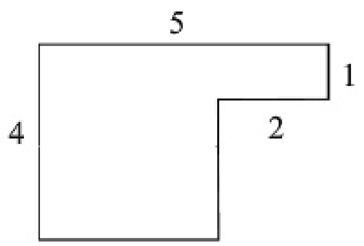
4. 一块土地的面积是367000 cm^2，试以 m^2 表示之。
5. 马来西亚的房地产行业至今依然流行使用平方英尺作为房屋建筑面积的测量单位。已知一公尺约为3.3英尺，问一平方公尺合几平方英尺？
6. 马来亚大学的校园面积约为309公顷而吉隆坡国际机场则占地约100平方公里。问机场的面积大约等同于几所马来亚大学的面积？

总复习题 6

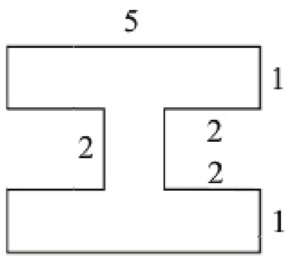
1. 有一正方形的地，其面积为2025 m^2。若要将此地围起来，需多长的篱笆？
2. 一长方形的面积为40 cm^2，它的长是8 cm。求长方形的周长。
3. 一三角形的面积为50 cm^2，底为20 cm，求它的高。
4. 一梯形的面积是42 cm^2，平行的两边各长14 cm及7 cm，求它的高。
5. 若一钓球场的面积是5027 m^2，问此面积等于多少 km^2？
6. 一张A4纸的尺寸是210 mm×297 mm，问其面积是多少 cm^2？

计算下列各图形的周长及面积。(7至10)（图形中的邻边都互相垂直）

7.

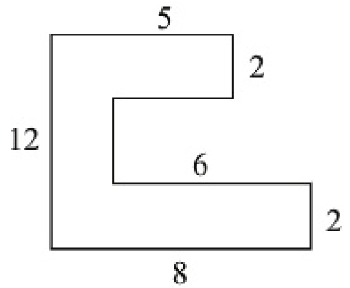


8.

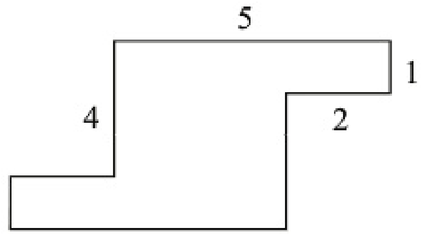


此图形为点对称图形

9.



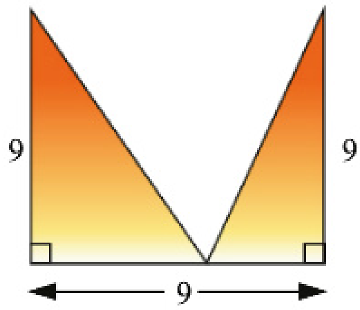
10.



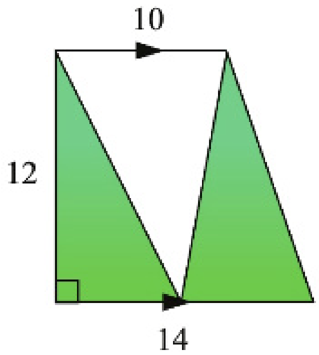
此图形为点对称图形

计算下列各图形着色部分的面积。(11至16)

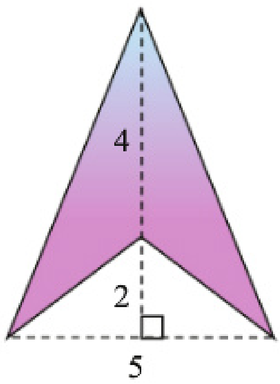
11.



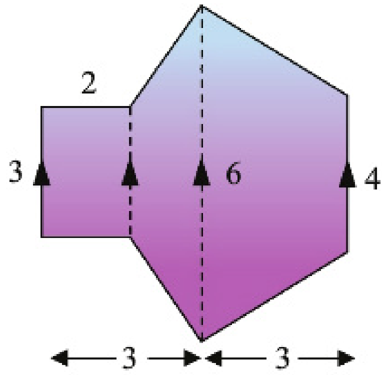
12.



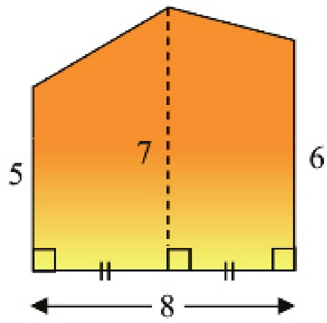
13.



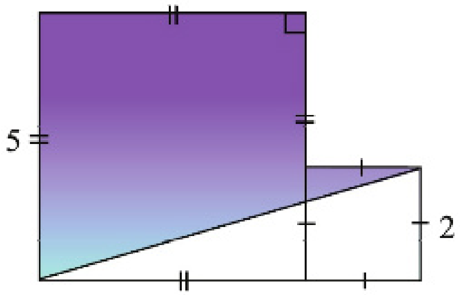
14.



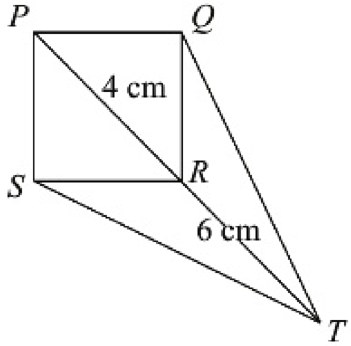
15.



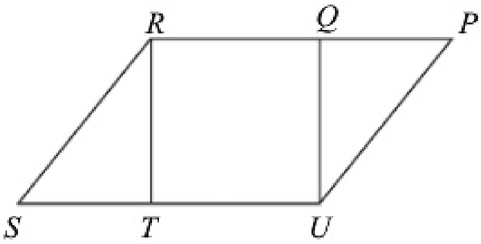
16.



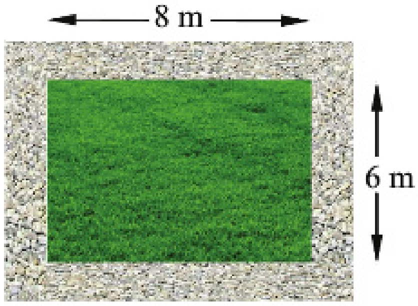
17. 右图中，$PQRS$ 为一正方形，$PR = 4$ cm，$RT = 6$ cm，求风筝形 $PQTS$ 的面积。



18. 右图中，$QRTU$ 为一正方形，$PRSU$ 为一平行四边形。若 $QRTU$ 的面积为 16 cm^2，$PQ = 3$ cm，求平行四边形 $PRSU$ 的面积。

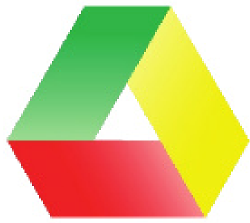


19. 有一块长8公尺，宽6公尺的长方形草地，其四周铺上1公尺宽的鹅卵石健行步道，求此健行步道的面积。



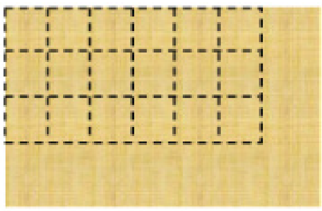
20. 一长方形墙壁长4 m，宽2 m，如砌上边长5 cm的正方形花砖，问共需多少块花砖？

21. 右图的黄绿红标志是由三个全等的平行四边形所构成。已知每个平行四边形较长的边长5cm，较短的边长3cm。求图形的周长。

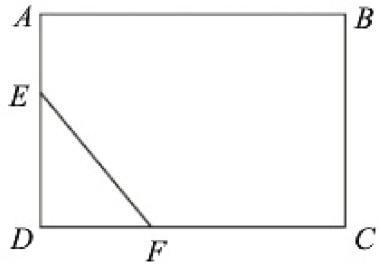


22. 在一张长1公尺的正方形纸上，最多能剪出多少张长5公分，宽4公分的长方形纸条？

23. 在一块长3 m，宽1 m的长方形布上，以右图所示的排列，最多能剪出多少块边长6 cm的正方形？



24. 右图中，$ABCD$为一个长方形。$AE:AD=1:3$，$DF:FC=2:3$。问ΔDEF的面积占$ABCD$的面积的几分之几?



名词对照

1 多项式

单项式	monomial	常数项	constant term
多项式	polynomial	降幂排列	arrange in descending order
幂	power	升幂排列	arrange in ascending order
系数	coefficient	同类项	like term
项	term	长除法	long division

2 因式分解

因式分解	factorization	最高公因式	highest common factor
因式	factor	最低公倍式	lowest common multiple
公因式	common factor		

3 平方根与立方根

平方根	square root	无理数	irrational number
立方根	cube root	二次根式	surd
实数	real number	分母有理化	rationalising the denominator
有理数	rational number		

4 三角形

三角形	triangle	重心	centroid
边	side	外心	circumcenter
顶点	vertex	垂心	orthocenter
内角	interior angle	内心	incenter
外角	exterior angle	旁心	excenter
锐角三角形	acute-angled triangle	全等形	congruent figures
直角三角形	right-angled triangle	全等三角形	congruent triangles
钝角三角形	obtuse-angled triangle	对应边	corresponding sides
不等边三角形	scalene triangle	对应角	corresponding angles
等腰三角形	isosceles triangle	腰	leg
等边三角形	equilateral triangle	顶角	vertex angle
角平分线	angle bisector	底边	base
中线	median	底角	base angle
高	height	斜边	hypotenuse

5 四边形及多边形

四边形	quadrilateral	正多边形	regular polygon
对边	opposite side	五边形	pentagon
对角线	diagonal	六边形	hexagon
风筝形	kite	七边形	heptagon
等腰梯形	isosceles trapezium	八边形	octagon
多边形	polygon	九边形	nonagon
凸多边形	convex polygon	十边形	decagon
凹多边形	concave polygon		

6 周长与面积

周长	perimeter
面积	area
平方单位	square units

1 多项式

练习 1.1 (第 5 页)

1. $-3x$，$-x^2y^2$，$-\frac{5}{9}$，$-\frac{2}{3}ab^2c^3$

2.

单项式	系数	次数
$-3ab$	-3	2
$\frac{1}{2}x^2y$	$\frac{1}{2}$	3
$0.1xyz$	0.1	3
$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	0
$\frac{5}{6}pqrs^2$	$\frac{5}{6}$	5
$\frac{-2ab^2c^3}{3}$	$-\frac{2}{3}$	6

3. (a) $-x^5+3x^4+8x^3-x-12$
   (b) $\frac{2}{3}x^4-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x+\frac{5}{12}$
4. (a) $-2-4x-10x^2+13x^3+3x^4$
   (b) $6+x-\frac{2}{3}x^2-5x^3$

随堂练习 1 (第 8 页)

1. $-2x^2$
2. $9ab$
3. $-x^2+8x$
4. $-3x^2y+12xy$
5. x^2+5
6. $-6y+5$

练习 1.2a (第 8 页)

1. 0
2. $23ab$
3. $-2x^2+6x+6$
4. $-x^3-x^2+4x+9$
5. $6x^2+2xy$
6. $-x^2-2y$
7. $-x^2y-2xy^2$
8. $2x^2+8y$
9. x^2-6
10. $10c^3-c^2+19$
11. $-11x^2-14xy+5y^2$
12. $4x^2y+x-3y^2-13$
13. $x+2y+1$
14. $\frac{13}{3}x-y-4$
15. $13x^2+6x+18$
16. $\frac{a}{4}-\frac{2}{3}b$

随堂练习 2 (第 10 页)

1. x^{15}
2. $-y^8$

随堂练习 3 (第 14 页)

1. 3^{25}
2. $-a^{10}$
3. a^2b^6
4. $27a^9b^3$
5. x^{27}

练习 1.2b (第 15 页)

1. x^{13}
2. $-b^{10}$
3. y^{24}
4. $-a^{10}$
5. b^{12}
6. $8m^3$
7. $25x^4$
8. x^4y^6
9. $16a^8b^4$
10. $\frac{1}{16}a^2b^6$
11. $-z^5$
12. $-a^{15}$

随堂练习 4 (第 16 页)

1. $6xy$
2. $-12ab^2$
3. $-80s^4t^4$

练习 1.2c (第 16 页)

1. $60ab$
2. $12x^2y^2$
3. $84pqr$
4. $24a^4b^4$
5. $-27a^{15}b^4$
6. $2p^5q^5$

随堂练习 5 （第 17 页）

1. $15x^2-12x$
2. $-10b+2b^2$
3. $4x^4-6x^3+2x^2$
4. $-p^3q+\frac{1}{2}p^2q^2-2pq^3$

练习 1.2d （第 18 页）

1. $27x^2+36x$
2. $-18x+6x^2$
3. $x^2y^2-xy^2z+x^2yz$
4. $-9y^3+15y^2+9y$
5. $2x^3y^2-x^2y^3$
6. $-ab^4+2a^2b^3-16a^3b^4$
7. $12a^2+ab-20b^2$

随堂练习 6 （第 19 页）

1. x^2-5x+6　　2. $2x^2-x-3$
3. x^4-6x^2+5　　4. x^3+1
5. $5x^2-14x-30$

练习 1.2e （第 19 页）

1. $x^2+10x+16$　　2. $n^2-11n+28$
3. $3y^2+14y-5$　　4. $15+7a-4a^2$
5. $21-4n^2-n^4$
6. $-4x^3+11x^2-16x+9$
7. $3n^3-2n^2-19n-6$
8. $2x^4-2x^3-17x^2+5x+30$
9. $5x^2+10x-13$

随堂练习 7 （第 21 页）

1. y^4　　2. $-b^3$
3. a^5y^5　　4. 1

练习 1.2f （第 22 页）

1. y^4　　2. $-a^7$
3. a^7x^7　　4. x

随堂练习 8 （第 23 页）

1. $3ab$　　2. -1

随堂练习 9 （第 24 页）

1. $2x-3$　　2. $6a^4b^2-\frac{2}{25}$
3. $-2a-b-3c$　　4. $-2c+4c^2d$

练习 1.2g （第 24 页）

1. $7ab^2$　　2. $-\frac{8}{3}a^2b$
3. $-6r^3s$　　4. $b-c$
5. $2x+1$　　6. $-8x^2+2xy^2$
7. $6x^3y+2xy-8$　　8. $-9ab-1+8a^2b^3$

随堂练习 10 （第 26 页）

1. $2x+4$　　2. y^4+1
3. 商式 $=3a^2+5a+13$，余式 $=65$

练习 1.2h （第 26 页）

1. $3x+5$
2. 商式 $=9y-27$，余式 $=1$
3. 商式 $=y^2+2y+7$，余式 $=26$
4. z^3-2z^2+4z-8
5. a^2+3a+3
6. 商式 $=3x^2-4x-2$，余式 $=2$

随堂练习 11 （第 29 页）

1. $100-y^2$
2. x^2-4y^2
3. $-36x^2+25y^2$
4. $81x^4-256$
5. 99.96

练习 1.3a （第 30 页）

1. p^2-169
2. $64-y^2$
3. y^2-4
4. $-16p^2+81q^2$
5. x^4-y^4
6. $\frac{9}{16}-p^2$
7. $625x^4-y^4$
8. $-p^4+16q^4$
9. (a) 39996 (b) 99.75

随堂练习 12 （第 32 页）

1. $x^2+x+\frac{1}{4}$
2. $4x^2+4xy+y^2$
3. $a^4-6a^2y^2+9y^4$
4. $4x^2+y^2+z^2+4xy-4xz-2yz$
5. (a) 9801 (b) 79.21

练习 1.3b （第 33 页）

1. $x^2+12x+36$
2. $1-6a+9a^2$
3. $9x^2+42xy+49y^2$
4. $\frac{1}{4}x^2-xy+y^2$
5. $16x^2+40xy+25y^2$
6. x^4-16x^2+64
7. $81x^2+6xy+\frac{1}{9}y^2$
8. $49a^4+42a^2b^2+9b^4$
9. $x^2+y^2+4z^2+2xy+4xz+4yz$
10. $4a^2+b^2+4c^2-4ab-8ac+4bc$
11. 992016

总复习题 1 （第 33 页）

1. $13x^2y$
2. $-2ab+2b^2$
3. $2x^2-xy+4y^2$
4. a^2-4a
5. $-12a^3b^3$
6. $-4x^3y^3$
7. $-2t$
8. $3b^2$
9. $-4a^4b^5$
10. $6a^2b^2-4ab^2$
11. $-\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{9}a^2+\frac{1}{6}a$
12. $3x^3y-xy$
13. $-a+b+5$
14. $x^2-2x-35$
15. x^2-49y^2
16. $-5a^2-19ab+4b^2$
17. $16x^2+24x+9$
18. $3x^4+2x^2y^2-y^4$
19. $15r^3-16r^2+44r-16$
20. $25-a^2b^2$
21. $4x^2+y^2+9z^2+4xy-12xz-6yz$
22. $x^2+18x+72$
23. $-5ab$
24. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
25. $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
26. $2t^2-t+3$
27. a^2+a+1
28. 商式$=3x^2-2x+6$
29. (a) 9860.49 (b) 43264
    (c) 97.75

2 因式分解

随堂练习 1 （第 38 页）

1. $9a(1-4b)$
2. $5(4+b-3a)$
3. $7x^2y(x-4)$
4. $a^3(a-1)$
5. $2(a-b)(2b+3)$
6. $(x-y)(b-2)$

练习 2.1a （第 39 页）

1. $12(x+4y)$
2. $7a(1-4b)$
3. $-8(x+7)$
4. $a(6+3b-c)$
5. $4(x^2+2)$
6. $5xy(y+5x)$
7. $x^2(x^2+1)$
8. $2(x^2+4x-7)$
9. $6x(36x^2+6x+1)$
10. $xyz(xz+y-1)$
11. $(2a-b)(x+2)$
12. $2(3a+2b)(2b+1)$
13. $(y-x)(p+q)$
14. $5(x-3)(a+3b)$
15. $3(2a-b)(x-y)$
16. $(3x+2y)(3p-2q)$

随堂练习 2 （第 41 页）

1. (a) $(a+12)(a-12)$
   (b) $(1+2k)(1-2k)$
   (c) $2(a+5b)(a-5b)$
   (d) $8(2x-1)(x-8)$
2. 140

练习 2.1b （第 41 页）

1. $(a+15)(a-15)$
2. $(d+8)(d-8)$
3. $(a+2b)(a-2b)$
4. $(6ab+1)(6ab-1)$
5. $(ad+2c)(ad-2c)$
6. $\left(p+\frac{1}{2}\right)\left(p-\frac{1}{2}\right)$
7. $\left(\frac{x}{5}+\frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{5}-\frac{y}{3}\right)$
8. $3(2x+3y)(2x-3y)$
9. $a(b+11)(b-11)$
10. $4(a+b+5)(a+b-5)$
11. $(7a-3b)(a+3b)$
12. $(a^2+9)(a+3)(a-3)$
13. $3(c-d)(c+d)$
14. $(4x+y)(2x+3y)$
15. (a) 998000 (b) 14000
    (c) 8

随堂练习 3 （第 44 页）

1. $(x+6)^2$
2. $(7c-6d)^2$
3. $x^2(x+9)^2$

练习 2.1c （第 44 页）

1. $(a+4)^2$
2. $(x-5)^2$
3. $(n+7)^2$
4. $(4x+1)^2$
5. $(1-2b)^2$
6. $-5(x-1)^2$
7. $3(x+8)^2$
8. $4(t-5)^2$

9. $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$ 10. $(2x+3y)^2$

11. $(4x-y)^2$ 12. $(mn+16)^2$

13. $(a^2+2)^2$ 14. $(b+2)^2(b-2)^2$

15. $(x-1)^2$ 16. $(y-2)^2$

随堂练习 4 （第 47 页）

1. $(x+4)(x+9)$ 2. $(x-3)(x-7)$

3. $(x+4)(x-3)$ 4. $(y+6)(y-18)$

5. $(x+7)(x-3)$ 6. $(m+2)(m-11)$

练习 2.1d （第 47 页）

1. $(x+2)(x+1)$ 2. $(y+2)(y+5)$

3. $(x+9)(x-1)$ 4. $(x+8)(x-7)$

5. $(y-5)(y+1)$ 6. $(x-3)(x+2)$

7. $(b-5)(b+2)$ 8. $(n-8)(n+3)$

9. $(y+14)(y-2)$ 10. $(a+9)(a+8)$

11. $(n-2)(n-16)$ 12. $(d+15)(d+3)$

13. $-(y-7)(y+4)$

14. $(x-2)(x-12)$

15. $-(b+2)(b-2)(b^2+2)$

16. $-(x+2)(x-2)(x^2+3)$

17. $x(x-13)(x+6)$

18. $(e+2)(e-2)(e^2-3)$

随堂练习 5 （第 50 页）

1. $(2x+3)(x+1)$ 2. $(3x-2)(x+1)$

3. $(2x+7)(2x+1)$ 4. $(2x-3)(3x-1)$

5. $(1-3y)(1+6y)$ 6. $(x+7y)(x-3y)$

练习 2.1e （第 50 页）

1. $(3x+1)(x+2)$ 2. $(3-2p)(5+p)$

3. $(3y+1)(y-2)$ 4. $(5x+1)(x-1)$

5. $(2x+1)(x+5)$ 6. $(3a+2)(a-3)$

7. $(3b+4)(b-2)$ 8. $(3a+5)(a+3)$

9. $(5y+3)(y+2)$ 10. $(4a+1)(a-2)$

11. $(7n-2)(n+3)$ 12. $(3d+4)(d-7)$

13. $(9a+10)(a-1)$

14. $(3a+4)(4a+3)$

15. $(3+5d)(7-2d)$

16. $(4m+n)(6m-n)$

17. $(a-4b)(a-6b)$

18. $(x+3y)(x-2y)$

19. $(4s-t)(s-4t)$

20. $(2a+3b)(4a-b)$

随堂练习 6 （第 53 页）

1. $(a-1)(c-1)$

2. $(1-x)(3-c)$

3. $(x-3y+4)(x-3y-4)$

4. $(3m-2n)(3m+2n+2)$

练习 2.1f （第 53 页）

1. $(m-n)(x+y)$ 2. $(2+y)(x+2)$

3. $(p-s)(r-q)$ 4. $(a+b)(x-y)$

5. $(2x-y)(2a-3b)$

6. $(k-m)(k-10)$

7. $(x-3z)(y+7)$

8. $(y-2)(x+3)$

9. $(y+3)(x-1)$

10. $(3x+2y)(3x+2y-2)$

11. $(2a+b)(2a+b-4)$

12. $(x+1)(x+y-1)$

13. $(1+m)(1-m-t)$

14. $(2m-n)(2m+n+3)$

15. $(x-2y+z)(x-2y-z)$

16. $(p-q)(p-q-1)$

随堂练习 7 （第 56 页）

1. $3ab$
2. $a+b$
3. $ab(a+3)(a+2)^2$
4. $x+1$

练习 2.2a （第 56 页）

1. $17a$ 2. $2ab^2$
3. x^2yz 4. $14ab$
5. $6x(x+y)$ 6. $a-c$
7. $c-d$ 8. $x+3$
9. $a+b$ 10. $(a+b)^2$

随堂练习 8 （第 58 页）

1. $54a^3b^2$
2. $2a(a+b)(a-b)$
3. $(x+3)(x-2)(x-1)$

练习 2.2b （第 58 页）

1. $42st$ 2. $12a$
3. $20a^3b^2$ 4. $12x^3y^2z^3$
5. $6t^2(t-1)$ 6. $2b(2b+a)(2b-a)$
7. $2x(x-1)^2$ 8. $12(x+y)^3$
9. $6(p+q)(p-q)$
10. $(x+2)(x+9)(x-1)$

总复习题 2 （第 59 页）

1. $xy(x-y)$ 2. $(1+4x)(1-4x)$
3. $(x+9)(x-5)$ 4. $\left(\frac{1}{2}a+3\right)\left(\frac{1}{2}a-3\right)$
5. $(y-9)(y+8)$ 6. $2(x-3)^2$
7. $(2+a)(5-a)$ 8. $p(p^2+1)^2$
9. $(3+a)(11-a)$ 10. $6a^2(a+2)(a-2)$
11. $(x+2)(y+3)$ 12. $(a-1)(5-a)$
13. $(a+b)(a+b-3)$
14. $(7x-y)(x+3y)$
15. $2(x-3)(x-8)$
16. $a(x+3)(x-3)$
17. $3ab(a-b)$
18. $(y+2)(x-7)$
19. $(t-2)(t+13)$
20. $(3x-10)(x+1)$
21. $(2x-3y)(3x+y)$
22. $(a-b)(a+2b-2)$
23. $(3t+2)(4t-5)$
24. $(2y+3)(7y+8)$
25. $(a+1)(3a+1)$
26. $(4x^2+1)(2x+1)(2x-1)$
27. $(m-2n)(2m+4n+1)$

28. $4(2x+5)(2x-5)$

29. ab^2，a^3b^4

30. $8x(x-1)$，$16x^2(x-1)^2$

31. $x+y$，$xy(x+y)$

32. $y+1$，$3(y+1)^2(y-1)$

3 平方根与立方根

随堂练习 1 （第 65 页）

1. (a) ±3　(b) ±0.2
   (c) $\pm\frac{1}{5}$　(d) $\pm\frac{2}{9}$
2. (a) 1　(b) 0.4
   (c) $\frac{2}{3}$　(d) $\frac{5}{4}$

练习 3.1a （第 65 页）

1. (a) ±4　(b) ±19
   (c) ±20　(d) ±22
   (e) ±50　(f) $\pm\frac{12}{17}$
   (g) $\pm\frac{4}{3}$　(h) $\pm\frac{5}{3}$
   (i) ±0.08　(j) ±1.3
   (k) ±1.5　(l) ±1.7
2. (a) 1.1　(b) 0.3
   (c) 35　(d) 0.9
   (e) 0.04　(f) $\frac{1}{2}$
   (g) $\frac{13}{14}$　(h) $\frac{8}{3}$
3. (a) -110　(b) 0.11
   (c) 1.6　(d) $-\frac{4}{9}$
   (e) $\frac{13}{6}$　(f) $\frac{4}{5}$
4. 5　5. 24

随堂练习 2 （第 69 页）

1. (a) 23　(b) $\frac{5}{6}$
   (c) 0.67　(d) $\frac{5}{6}$
2. (a) 6　(b) 0.27
   (c) $\frac{3}{25}$　(d) $\frac{10}{3}$

练习 3.1b （第 70 页）

1. (a) 13　(b) 7.1
   (c) $\frac{3}{4}$　(d) $-3\frac{4}{5}$
2. (a) 4　(b) 3.21
   (c) 0.1　(d) $\frac{7}{10}$
3. (a) 0.6　(b) 624
   (c) $\frac{14}{33}$　(d) $\frac{24}{49}$
4. (a) 17　(b) 18
   (c) 32　(d) 33
5. (a) ±12　(b) ±17
   (c) ±1.5　(d) $\pm\frac{5}{2}$

随堂练习 3 （第 72 页）

1. (a) 5　(b) -0.3
2. (a) -10　(b) $\frac{2}{3}$

练习 3.2 （第 73 页）

1. -1　2. 3
3. -3　4. 6
5. 7　6. 11

7. 12　　8. -20

9. -0.8　　10. 0.4

11. $\frac{3}{4}$　　12. $\frac{4}{3}$

13. $\frac{6}{5}$　　14. $-\frac{1}{2}$

15. $\frac{3}{4}$　　16. 5

17. 0.001；0.01；0.1；1；10；100；1000

18. 7　　19. 0.9

20. $-\frac{1}{3}$　　21. $-\frac{5}{8}$

随堂练习 4 （第 78 页）

1. (a) 30　　(b) $\frac{28}{3}$

   (c) $2ab$　　(d) $\frac{a^2}{5b}$

2. (a) $6\sqrt{2}$　　(b) $5\sqrt{6}$

   (c) $a\sqrt{5a}$　　(d) $ab\sqrt{b}$

练习 3.4 （第 79 页）

1. $4\sqrt{3}$　　2. $6\sqrt{3}$

3. $7\sqrt{7}$　　4. $8\sqrt{6}$

5. 60　　6. 72

7. $9\sqrt{5}$　　8. $14\sqrt{6}$

9. $10\sqrt{m}$　　10. $8a$

11. $2\sqrt{3}b^2$　　12. $5n\sqrt{5n}$

13. $3\sqrt{3}xy$　　14. $2xy^2\sqrt{2x}$

15. $\frac{xy^2}{9z}$　　16. $\frac{xz\sqrt{3z}}{y^2}$

17. 3.46　　18. 4.24

19. 4.47

随堂练习 5 （第 81 页）

1. $2\sqrt{2}$　　2. $19\sqrt{5}$

3. $-4\sqrt{a}$　　4. $3\sqrt{3x}$

练习 3.5a （第 81 页）

1. (a) 错误　　(b) 错误

   (c) 错误　　(d) 正确

   (e) 错误

2. $13\sqrt{2}$　　3. 0

4. $-11\sqrt{7}$　　5. $31\sqrt{5}+9\sqrt{3}$

6. $16\sqrt{3}-\frac{17}{5}\sqrt{2}$　　7. $3\sqrt{2}$

8. $\sqrt{3}$　　9. 0

10. $7\sqrt{3}$　　11. $\sqrt{5}$

12. $\sqrt{2}$　　13. $-2\sqrt{2}$

14. $-2\sqrt{2}$　　15. $\sqrt{7}$

16. $7\sqrt{3}$　　17. 0

18. $6\sqrt{5}$　　19. $-\sqrt{6}$

20. $-\frac{4}{3}\sqrt{2}$　　21. $\frac{2}{5}\sqrt{3}$

22. $7\sqrt{p}$　　23. $-2\sqrt{2m}$

24. $7\sqrt{2ab}$　　25. $-\sqrt{2x}-9\sqrt{2y}$

随堂练习 6 （第 85 页）

1. $\sqrt{10}$　　2. $3\sqrt{5}$

3. $6\sqrt{6}$　　4. $2\sqrt{3}+2\sqrt{5}$

练习 3.5b （第 85 页）

1. $2\sqrt{3}$　　2. $10\sqrt{2}$

3. $10\sqrt{10}$　　4. 48

5. 1　　6. $10\sqrt{2}$

7. $6\sqrt{6}$
8. $5\sqrt{3}$
9. $231\sqrt{21}$
10. $10\sqrt{42}$
11. 24
12. $2ab$
13. $5\sqrt{5}-10$
14. $3\sqrt{10}+5\sqrt{3}$
15. 0
16. $6a-3\sqrt{a}$
17. $\sqrt{5}x-5\sqrt{x}$
18. $1+\sqrt{3}$
19. $-6-5\sqrt{2}$
20. $102-58\sqrt{3}$
21. $7\sqrt{5}$
22. 155
23. $23+7\sqrt{10}$
24. $4a-2b$
25. $3x$
26. $30+12\sqrt{6}$
27. $34-8\sqrt{15}$
28. $x+2y+2\sqrt{2xy}$
29. $9x+4-12\sqrt{x}$
30. $2n$

随堂练习 7 （第 89 页）

1. (a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (b) $\frac{3\sqrt{10}}{5}$
2. $3\sqrt{5}+5\sqrt{3}$

练习 3.5c （第 89 页）

1. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$
2. $2\sqrt{5}$
3. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
4. $\frac{\sqrt{30}}{20}$
5. $\frac{4\sqrt{6}}{21}$
6. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
7. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
8. $\sqrt{3}$
9. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
10. $\frac{\sqrt{6}}{4}$
11. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
12. $2\sqrt{2}+\sqrt{6}$
13. $5\sqrt{3}+1$
14. $5\sqrt{2}$
15. $\frac{1}{3}\sqrt{5}$
16. $\frac{19}{30}\sqrt{5}$
17. $-\frac{43}{18}\sqrt{6}$
18. $-\frac{1}{6}\sqrt{3}-\frac{1}{4}\sqrt{2}$

随堂练习 8 （第 93 页）

1. $\sqrt{5}-2$
2. $\frac{\sqrt{6}+1}{5}$
3. $3\sqrt{3}-5$

练习 3.5d （第 93 页）

1. $2+\sqrt{3}$
2. $\sqrt{6}-\sqrt{5}$
3. $-1-\sqrt{2}$
4. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
5. $\sqrt{7}+2$
6. $7\sqrt{3}+12$
7. $2\sqrt{2}+2$
8. $-\frac{2\sqrt{5}+5\sqrt{2}}{3}$
9. $7-4\sqrt{3}$
10. $5+3\sqrt{2}$
11. $\frac{12+7\sqrt{6}}{10}$
12. $\frac{6+5\sqrt{6}}{19}$
13. $\sqrt{3}$
14. $-\frac{4\sqrt{10}}{3}$
15. 5.20
16. 0.47
17. 2.98
18. 0.59
19. 1.73
20. 1.18

总复习题 3 （第 94 页）

1. $\pm\frac{1}{16}$
2. ± 2.6
3. 5
4. 15
5. $-\frac{5}{4}$
6. $\pm\frac{5}{6}$
7. 0.014
8. 0.06
9. 78
10. 360

11. 2000
12. $\frac{17}{15}$
13. 6
14. $-3\frac{1}{2}$
15. -543
16. $-\frac{1}{7}$
17. ± 2.1
18. ± 0.03
19. $\pm\frac{1}{150}$
20. -4
21. 400
22. -0.4
23. -10
24. 0.8
25. 455
26. $\frac{18}{143}$
27. $\frac{4}{25}$
28. $10ab^2\sqrt{5a}$
29. $\frac{5n^2\sqrt{6n}}{m}$
30. $13\sqrt{2}$
31. $-5\sqrt{5}$
32. $-\frac{41}{12}\sqrt{3}$
33. $2\sqrt{6}$
34. $-3\sqrt{2x}$
35. $30\sqrt{6}$
36. 9
37. $4\sqrt{3}-3\sqrt{2}$
38. $3-2\sqrt{2}$
39. 19
40. $18a-3b$
41. $4x^2+12\sqrt{2}x+18$
42. $7y$
43. 1
44. $2\sqrt{2}+3\sqrt{3}$
45. $\sqrt{6}$
46. $-\frac{\sqrt{7}}{42}$
47. $2\sqrt{5}-2\sqrt{3}$
48. $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$
49. $5\sqrt{3}-6\sqrt{2}$
50. $2\sqrt{3}$
51. $13\sqrt{3}-10\sqrt{5}$
52. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
53. -5
54. $-5-5\sqrt{3}$
55. 0.38
56. 2.41
57. -3.73
58. -0.73

4 三角形

随堂练习 2 (第 103 页)

1. (a) 锐角三角形：(i)，(iv)
   钝角三角形：(iii)
   直角三角形：(ii)
   (b) 不等边三角形：(ii)，(iii)
   等腰三角形：(i)
   等边三角形：(iv)
2. (a) 不能　(b) 不能
   (c) 能
3. $XZ < YZ < XY$

练习 4.1 (第 104 页)

1. (a) 能　(b) 不能
   (c) 能　(d) 不能
2. $2 < BC < 8$
3. $7 < XZ < 11$
4. $\angle X > \angle Y > \angle Z$
5. (a) $\angle B$ 最大，$\angle A$ 最小
   (b) $\angle A$ 最大，$\angle B$ 最小
6. 12 cm

随堂练习 3 (第 108 页)

1. (a) $98°$　(b) $21°$
2. (a) $60°$　(b) $65°$
3. $105°$

随堂练习 4 (第 110 页)

1. (a) $76°$　(b) $44°$
2. $\angle ABC = 58°$，$\angle BAC = 79°$

练习 4.2 （第 110 页）

1. (a) $x=70°$ (b) $x=74°$
   (c) $x=30°$ (d) $x=58°$
   (e) $x=66°$ (f) $x=104°$
   (g) $x=70°$， $y=58°$
   (h) $x=130°$
   (i) $x=42°$
   (j) $x=130°$， $y=115°$， $z=23°$
   (k) $x=38°$
   (l) $x=30°$， $y=61°$
   (m) $x=56°$， $y=108°$， $z=52°$
   (n) $x=84°$， $y=100°$， $z=120°$
2. $CA>BC>AB$
3. $61°$
4. (a) $\angle B=84°$
   (b) $\angle A=87°$
   (c) $\angle B=33°$， $\angle C=42°$
5. $28°$ 8. $180°$

随堂练习 5 （第 114 页）

1. $PQ=CA$， $PR=CB$， $QR=AB$，
   $\angle P=\angle C$， $\angle Q=\angle A$， $\angle R=\angle B$
2. (a) $\angle B=80°$， $\angle Q=80°$， $\angle R=60°$
   (b) 7

练习 4.3a （第 115 页）

1. $\Delta ABC\cong\Delta CDA$
   $AB=CD$， $AC=CA$， $BC=DA$，
   $\angle ABC=\angle CDA$， $\angle BCA=\angle DAC$，
   $\angle CAB=\angle ACD$
2. $x=85°$， $y=4$

随堂练习 6 （第 120 页）

2. (a) 不是 (b) 是
3. (c) $82°$

练习 4.3b （第 121 页）

2. $\Delta ABC\cong\Delta RPQ$ (SSS)
   $\Delta DEF\cong\Delta ZXY$ (SSS)
   $\Delta GHK\cong\Delta LNM$ (SSS)
3. (b) $30°$

随堂练习 7 （第 125 页）

2. $\Delta ABC\cong\Delta NML$ (SAS)
3. (b) $80°$ (c) 5 cm
   (d) $58°$

练习 4.3c （第 126 页）

2. (b) $\angle B=45°$， $\angle C=29°$， $\angle DEC=106°$
   (c) 12 cm
3. (a) $32°$ (c) $32°$
4. (b) $\angle B=63°$， $\angle C=63°$

随堂练习 8 （第 133 页）

2. $\Delta ABC\cong\Delta UTS$ (ASA)
   $\Delta DEF\cong\Delta XYZ$ (ASA)
   $\Delta KLM\cong\Delta RPQ$ (ASA)

练习 4.3d （第 133 页）

2. (b) $AD=4$ cm， $BC=6$ cm

练习 4.3e （第 138 页）

2. $\Delta ABC\cong\Delta XYZ$ (RHS)
   $\Delta KLM\cong\Delta PQR$ (SAS)
4. (b) $32°$

6. (d) 73°
7. (c) 56°

随堂练习 10 (第 144 页)

1. (a) 是 (b) 不是
   (c) 是
3. (a) $x = 72°$， $y = 36°$
   (b) ΔABC， ΔBCD， ΔABD

练习 4.4 (第 145 页)

1. (a) 不是 (b) 是
   (c) 是
2. (a) 40° (b) 66°
   (c) 52° (d) 36°
   (e) 63° (f) 112°
   (g) 65° (h) 132°
   (i) 44°
3. (a) $\angle B = 40°$
   (b) $\angle A = 45°$， $\angle B = 90°$
   (c) $\angle B = 40°$
   (d) $\angle A = 80°$， $\angle B = 20°$
4. 58°
5. $\angle C = 35°$， $\angle B = 30°$， $\angle BAC = 115°$
6. $x = 68°$， $y = 44°$， $z = 102°$
7. $x = 36°$
8. (a) 48°
10. (a) 62° (b) 31°

随堂练习 11 (第 151 页)

1. (a) 不是 (b) 是
   (c) 不是
2. 5 cm
3. $\angle C = 29°$， $\angle BAD = 29°$， $\angle CAD = 61°$

练习 4.5 (第 153 页)

1. $\angle B = 38°$， $\angle C = 52°$， $\angle CAD = 38°$
2. (a) 6 cm (b) 30°
   (c) $RS = 3$ cm， $QS = 9$ cm
3. 250 m
4. (a) 30° (b) 3 cm
5. (a) 51° (b) 51°
   (c) 4 cm
7. 4 cm

总复习题 4 (第 154 页)

1. (a) $x = 84°$， $y = 36°$
   (b) $x = 44°$
   (c) $x = 10°$， $y = 22°$
   (d) $x = 94°$， $y = 30°$
   (e) $x = 65°$
   (f) $x = 54°$， $y = 63°$
   (g) $x = 50°$， $y = 80°$
   (h) $x = 72°$， $y = 56°$
   (i) $z = 47°$
   (j) $y = 30°$， $z = 28°$
   (k) $x = 31°$， $y = 54°$， $z = 86°$
   (l) $x = 64°$
   (m) $x = 102°$， $y = 62°$
   (n) $x = 72°$
   (o) $x = 69°$， $y = 67°$
   (p) $x = 27°$
2. $\angle A = 45°$， $\angle B = 60°$， $\angle C = 75°$
3. $\angle Q$； 96°
4. $3 < AC < 11$
5. 720°
6. 64°
7. 42°
8. $\angle ADB = 86°$， $\angle ADC = 94°$

9. 180°　　10. 40°

11. 56°　　12. 42°

13. 84°　　14. 86°

15. (a) $\Delta DEF \cong \Delta QRP$ (RHS)

(b) $\Delta ABC \cong \Delta QPR$ (SSS)

(c) $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ (SAS)

(d) $\Delta ABC \cong \Delta EFD$ (AAS)

(e) $\Delta ABC \cong \Delta DFE$ (ASA)

16. (a) 8 cm　　(b) 56°

17. (a) 13　　(b) 35°

18. (b) 58°

19. 56°

20. $\angle DAB = 34°$，$\angle ADB = 112°$

21. 81°

22. 38°

23. (a) 30°　　(b) 4 cm

24. (a) $KM = 10$，$EF = 5$

(b) $\angle K = 60°$，$\angle D = 30°$，$\angle E = 60°$

5 四边形与多边形

随堂练习 1 (第 163 页)

1. 是；360°

2. (a) $x = 120°$

(b) $x = 100°$，$y = 60°$

练习 5.1 (第 164 页)

1. $x = 80°$

2. $x = 84°$

3. $x = 126°$，$y = 46°$

4. $x = 45°$，$y = 45°$

随堂练习 2 (第 167 页)

1. (a) ✓　　(b) ×

(c) ✓　　(d) ×

(e) ✓　　(f) ✓

(g) ×

2. $a = 3$，$b = 2$，

$x = 73°$，$y = 61°$，$z = 127°$

3. $QM = 3$ cm，$PR = 8$ cm

练习 5.2a (第 168 页)

1. (a) $\angle B = 122°$，$\angle C = 58°$，$\angle D = 122°$

(b) $BC = 5$ cm，$CD = 8$ cm

2. $\angle PSR = 132°$，$\angle SPQ = 48°$

3. $a = 85°$，$b = 30°$，$c = 45°$，$d = 85°$，

$e = 20°$，$f = 65°$

4. $EF = 7$，$EH = 8$

5. 14

6. (a) $x = 34°$

(b) $x = 86°$，$y = 44°$，$z = 50°$

(c) $x = 28°$，$y = 9°$

(d) $x = 49°$

7. (a) $\angle B = 60°$，$\angle C = 120°$

(b) $AD = 5$ cm，$AB = 7.5$ cm

8. (a) 130°　　(b) 6 cm

9. (a) 6 cm　　(b) 65°

(c) 50°

10. $a = 116°$，$b = 64°$，$c = 64°$，$d = 26°$，

$e = 26°$

随堂练习 3 (第 173 页)

1. 不是　　2. 不是

练习 5.2b （第 173 页）

1. (a) 是　(b) 不是
   (c) 是　(d) 不是
   (e) 是　(f) 是
   (g) 是　(h) 是
2. (a) 5 cm　(b) 108°

随堂练习 4 （第 178 页）

1. (a) ✓　(b) ×
   (c) ✓　(d) ×
   (e) ×　(f) ✓
   (g) ✓
2. 8 cm

练习 5.3 （第 178 页）

1. $x=35°$， $y=55°$
2. $z=118°$
3. 7.5 cm
4. $x=75°$， $y=23°$
5. $x=16°$， $y=20°$

随堂练习 5 （第 182 页）

1. (a) ✓　(b) ×
   (c) ×　(d) ✓
   (e) ✓　(f) ✓
   (g) ✓　(h) ×
   (i) ×
2. (a) $QR=8$ cm， $RS=8$ cm， $PS=8$ cm
   (b) $\angle PRS=36°$， $\angle QPR=36°$，
   $\angle QPS=72°$
   (c) $\angle RQO=54°$， $\angle PQR=108°$，
   $\angle PSR=108°$

练习 5.4 （第 182 页）

1. (a) 72°　(b) 54°
   (c) 108°
2. (a) 7 cm　(b) 90°
   (c) 33°
3. 70°　4. 69°
5. 34°

随堂练习 6 （第 185 页）

1. (a) ✓　(b) ✓
   (c) ✓　(d) ✓
   (e) ✓　(f) ✓
   (g) ✓　(h) ✓
   (i) ✓　(j) ✓
   (k) ✓
2. ΔPQR， ΔOPQ， ΔQRS， ΔOQR，
   ΔRSP， ΔORS， ΔSPQ， ΔOSP
3. (a) 8 cm
   (b) $x=45°$， $y=90°$， $z=45°$

练习 5.5 （第 186 页）

1. (a) 菱形　(b) 菱形
   (c) 长方形　(d) 正方形
   (e) 长方形　(f) 正方形
   (g) 三者都不是　(h) 长方形
   (i) 三者都不是　(j) 长方形
   (k) 三者都不是　(l) 菱形
2. (a) 135°　(b) 67.5°
3. (a) 36°　(b) 72°
   (c) 63°
4. (b) $x=33°$， $y=123°$

随堂练习 7 （第 188 页）

1. (a) ✗　(b) ✗
   (c) ✓　(d) ✗
   (e) ✗　(f) ✗
   (g) ✗　(h) ✗
   (i) ✓　(j) ✗
2. $a=32°$，$b=44°$，$c=58°$，$d=58°$，$e=46°$，$f=46°$

练习 5.6 （第 189 页）

1. 114°
2. $w=32°$，$x=62°$，$y=116°$，$z=56°$
3. $x=48°$，$y=68°$

随堂练习 8 （第 191 页）

120°

练习 5.7 （第 192 页）

1. (a) $x=57°$
   (b) $x=75°$，$y=105°$，$z=105°$
2. 71°
3. $x=63°$，$y=117°$
4. (a) 40°　(b) 67°
   (c) 40°　(d) 33°

随堂练习 9 （第 194 页）

(a) 风筝形、长方形、菱形、正方形

(b) 平行四边形、长方形、菱形、正方形

练习 5.8 （第 194 页）

	梯形	风筝形	平行四边形	长方形	菱形	正方形
(a)			✓	✓	✓	✓
(b)			✓	✓	✓	✓
(c)			✓	✓	✓	✓
(d)				✓		✓
(e)			✓	✓	✓	✓
(f)		✓			✓	✓
(g)					✓	✓
(h)				✓		✓
(i)		✓			✓	✓
(j)				✓		✓
(k)					✓	✓
(l)				✓		✓
(m)				✓		✓
(n)				✓		✓

随堂练习 10 （第 197 页）

1. (a) 凹　(b) 凸
   (c) 凹　(d) 凸
   (e) 凹　(f) 凹

随堂练习 11 （第 203 页）

1. (a) 128°　(b) 74°
2. 2160°
3. 150°

练习 5.9 （第 203 页）

1. (a) $x=106°$　(b) $x=30°$
   (c) $x=125°$　(d) $x=62°$
   (e) $x=15°$
   (f) $x=114°$，$y=145°$
   (g) $x=60°$，$y=95°$
   (h) $x=47°$，$y=47°$

2. 1620°
3. 16
4. 18
5. 20
6. 10
7. 165°
8. 1080°
9. 160°
10. 156°
11. 162°
12. $x=72°$， $y=36°$
13. (a) $x=90°$， $y=30°$
    (b) 10
14. $x=67.5°$， $y=22.5°$， $y=22.5°$
15. $x=40°$， $y=100°$

总复习题 5 （第 205 页）

1. (a) ✓ (b) ×
   (c) × (d) ✓
   (e) ✓ (f) ×
   (g) × (h) ✓
   (i) ✓ (j) ✓
2. (a) 长方形 (b) 梯形
   (c) 梯形 (d) 菱形
   (e) 正方形 (f) 梯形
   (g) 长方形 (h) 全部都不是
   (i) 正方形 (j) 长方形
   (k) 平行四边形 (l) 平行四边形
   (m) 菱形 (n) 风筝形
   (o) 平行四边形
3. (a) $x=30°$， $y=62°$
   (b) $x=64°$， $y=90°$， $z=52°$
   (c) $x=140°$
   (d) $x=42°$， $y=108°$
   (e) $x=74°$ (f) $x=82°$
   (g) $x=116°$ (h) $x=40°$
   (i) $x=31°$， $y=38°$
   (j) $x=68°$ (k) $x=110°$
   (l) $x=98°$
4. 2700°
5. 10
6. 10°
7. 12 cm
8. $x=42°$， $y=20°$
9. 40°
10. 180°
11. 78°
12. $x=58°$， $y=78°$
13. (a) 90° (b) 6 cm
14. 150°
15. 112.5°
16. 420°
17. 55°
18. $x=108°$， $y=52°$
19. $x=27.5°$， $y=55°$
20. $x=9°$， $y=27°$
21. 60°
22. 270°
23. 360°
24. (a) $x=36°$， $y=36°$
25. $x=36°$， $y=72°$， $z=54°$

6 周长与面积

随堂练习 1 （第 217 页）

1. 35 cm
2. 12 cm
3. 32 cm

练习 6.1 （第 218 页）

1. (a) 28 cm (b) 16 cm
   (c) 36 cm (d) 24 cm
2. 96 cm
3. 16 cm
4. nx cm
5. $\frac{y}{n}$ cm
6. 13 cm
7. 60 cm
8. 32 cm
9. 176 cm
10. 1403.5 公尺；46 分钟 47 秒

11. (a) 32 cm (b) 52 cm
(c) 有可能

随堂练习 2 (第 222 页)

1. (a) 16 cm^2 (b) 252 cm^2
2. 169 cm^2 3. 12 m^2

练习 6.2a (第 223 页)

1. (a)

边长	面积	周长
6 mm	36 mm^2	24 mm
4 cm	16 cm^2	16 cm
7 m	49 m^2	28 m

(b)

长	宽	面积	周长
3 cm	7 cm	21 cm^2	20 cm
9 cm	4 cm	36 cm^2	26 cm
7 m	3 m	21 m^2	20 m

2. 0.25 m^2 3. 12 cm
4. 196 cm^2；不相等
5. 32 cm 6. 8 cm
7. 1080 8. 20%
9. 44% 10. 3

随堂练习 3 (第 227 页)

1. (a) 22 m^2 (b) 20 m^2
(c) 14 cm^2
2. 5 cm

练习 6.2b (第 228 页)

1. (a) 5 m^2 (b) 32 m^2
(c) 12.25 m^2 (d) 10 cm^2
(e) 13.5 cm^2 (f) 8.4 cm^2

2. $AD = 10\frac{2}{3}$ cm， $BE = 13\frac{1}{3}$ cm
3. 24 cm^2 4. 2 : 3

随堂练习 4 (第 231 页)

1. (a) 30 cm^2 (b) 12 cm^2
2. 3 cm

练习 6.2c (第 232 页)

1. (a) 24 cm^2 (b) 32 cm^2
(c) 45 cm^2 (d) 24 cm^2
2. 12 cm 3. 2.5 cm
4. 3 cm 5. 112 cm^2
6. 24 cm^2

随堂练习 5 (第 234 页)

1. 12 cm^2 2. 16 cm

随堂练习 6 (第 236 页)

1. (a) 18 cm^2 (b) 22 cm^2
2. (a) 2 (b) 4

练习 6.2d (第 237 页)

1. (a) 9 cm^2 (b) 140 cm^2
(c) 25 cm^2 (d) 52.5 cm^2
(e) 42 cm^2 (f) 28.5 cm^2
2. 20 cm^2 3. 50%
4. 16 cm^2 5. 5 m
6. 26 cm^2

随堂练习 7 （第 240 页）

1. 1000000 平方公尺；100 公顷

2. (a) km^2 (b) cm^2
   (c) 公顷 (d) m^2

练习 6.3 （第 240 页）

1.

	cm^2	m^2	km^2
(a)	2000000	200	0.0002
(b)	500000000	50000	0.05

2. (a) $3.75\ m^2$ (b) $37500\ cm^2$

3. $2' \times 5'$

4. $36.7\ m^2$

5. 10.89 平方英尺

6. 32 个

总复习题 6 （第 241 页）

1. 180 m
2. 26 cm
3. 5 cm
4. 4 cm
5. $0.005027\ km^2$
6. $623.7\ cm^2$
7. 18 单位，14 平方单位
8. 26 单位，12 平方单位
9. 46 单位，42 平方单位
10. 24 单位，19 平方单位
11. 40.5 平方单位
12. 84 平方单位
13. 10 平方单位
14. 25.5 平方单位
15. 50 平方单位
16. 22 平方单位
17. $20\ cm^2$
18. $28\ cm^2$
19. 32 平方公尺
20. 3200 块
21. 30 cm
22. 500 张
23. 800 块
24. $\frac{2}{15}$